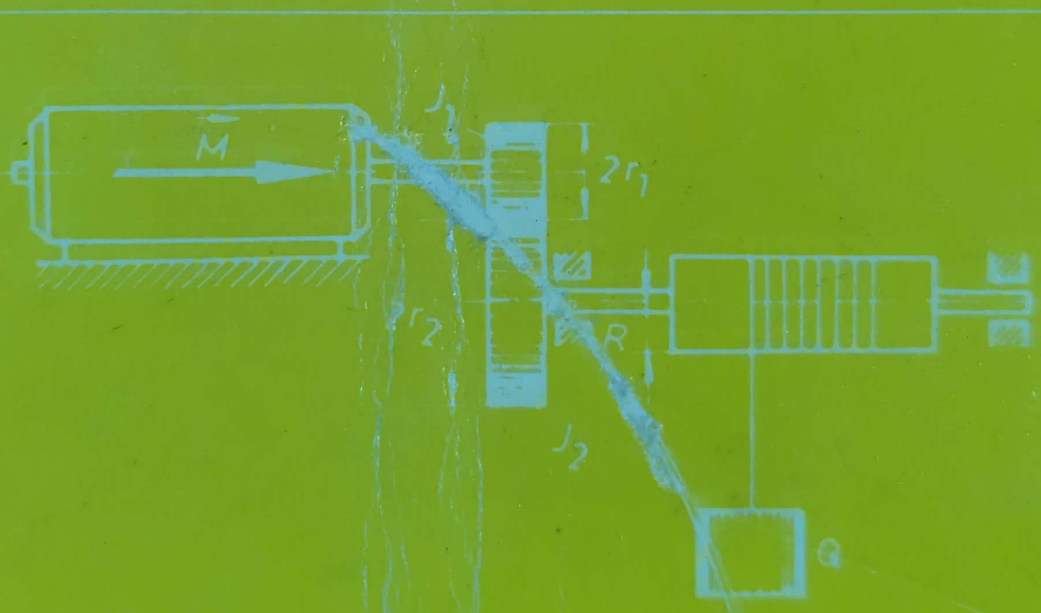
HEGEDŰS ATTILA DOINA DRĂGULESCU

PROBLEME DE MECANICĂ

-DINAMICĂ-



HELICON

Scanned with OKEN Scanner

HEGEDŰS ATTILA DOINA DRĂGULESCU

PROBLEME DE MECANICĂ

– D I N A M I C Ă –

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Lucrarea conține probleme din principalele capitole ale dinamicii. O parte din acestea au evident conținut practic, aplicativ, referindu-se la anumite mașini și dispozitive întîlnite în industrie. Multe din probleme au fost date la cele două etape ale concursului profesional-științific studențesc. Ca urmare, culegerea se adresează studenților din învățămîntul tehnic superior, inginerilor din cercetare și producție și tuturor celor interesați de aplicațiile mecanicii.

În prima parte a cărții sînt date enunțurile problemelor, grupate în 5 capitole, iar în cea de a doua se dau indicații privind rezolvarea lor, precum și rezultatele, respectiv rezolvările complete ale problemelor marcate cu asterisc. Anexa cuprinde principalele noțiuni teoretice și formulele de bază necesare la soluționarea problemelor.

În procesul elaborării problemelor și în rezolvarea propriu-zisă s-a ținut seama de posibilitățile oferite de calculatorul electronic. Programele întocmite în limbaj BASIC pentru efectuarea unor calcule numerice, rezolvarea unor ecuații sau reprezentarea grafică a unor funcții sînt date fie în

Scanned with OKEN Scanner

cadrul rezolvărilor, fie în anexă. La întocmirea şi rularea acestor programe am fost ajutaţi de către analistul Iosif Csernat, căruia îi aducem mulţumiri.

Mulţumim, de asemenea, Editurii HELICON, colegilor de la catedră şi tuturor celor ce ne-au sprijinit în elaborarea şi apariţia acestei cărţi.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

1. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

1.1. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

1.1. Dintr-o maşină de sortare, particulele ies cu viteza orizontală $\vec{v}_A$ şi trebuie să ajungă pe un plan înclinat (fig. 1.1.). Cunoscînd coordonatele $x_A=0$; $y_A= 0{,}82$ m şi $x_B=1{,}15$ m; $y_B=0$, să se determine:

1) Valoarea vitezei $\vec{v}_A$ astfel încît particulele să ajungă în punctul B.

2) Timpul în care ajunge o particulă din A în B.

3) Unghiul α de înclinare a planului astfel încît direcţia lui să coincidă cu direcţia vitezei $\vec{v}_B$.

Rezistenţa aerului se consideră neglijabilă.

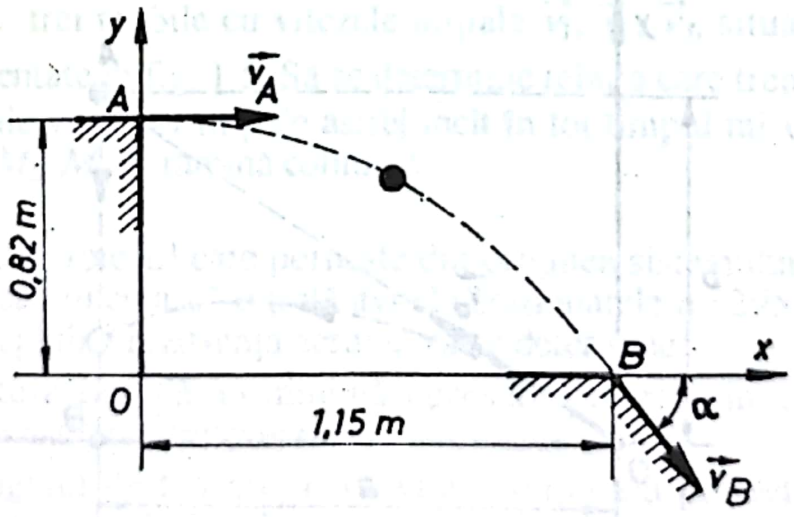


Fig. 1.1

Scanned with OKEN Scanner

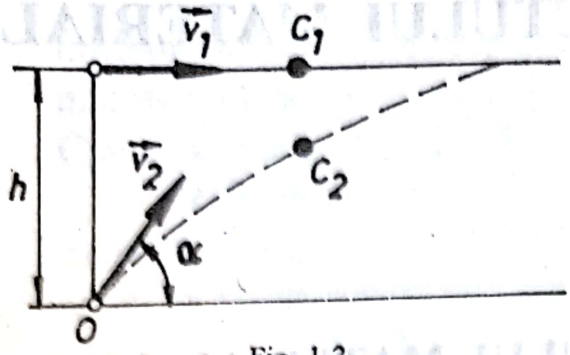


Fig. 1.2

1.2. Corpul C_1 zboară la înălțimea $h=1000$ m în linie dreaptă și cu viteza constantă $v_1=165$ m/s. În momentul în care C_1 se află deasupra punctului 0, se aruncă din 0 sub unghiul α și cu viteza $v_2=330$ m/s un al doilea corp C_2. Vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ se află în același plan vertical.

1) Ce valoare trebuie să aibă unghiul α pentru ca cele două corpuri să se întîlnească?

2) Unghiul α avînd valoarea determinată la punctul 1, după cît timp se vor întîlni corpurile?

1.3. Un glonte pornește din punctul 0 cu viteza inițială $\vec{v}_0$ spre ținta care se află în poziția A ($a=150$ m, $b=100$ m), (fig. 1.3). În același moment ținta începe să cadă liber.

1) Să se arate că pentru orice valoare a vitezei inițiale $\vec{v}_0$, glontele întîlnește ținta.

2) Ce valoare trebuie să aibă viteza $\vec{v}_0$ pentru ca în momentul întîlnirii viteza glontelui să fie orizontală?

3) Ce valoare trebuie să aibă viteza v_0 pentru ca întîlnirea să aibă loc în punctul B (la același nivel cu 0)?

4) După cît timp ajunge glontele la țintă în cazurile 2) și 3)?

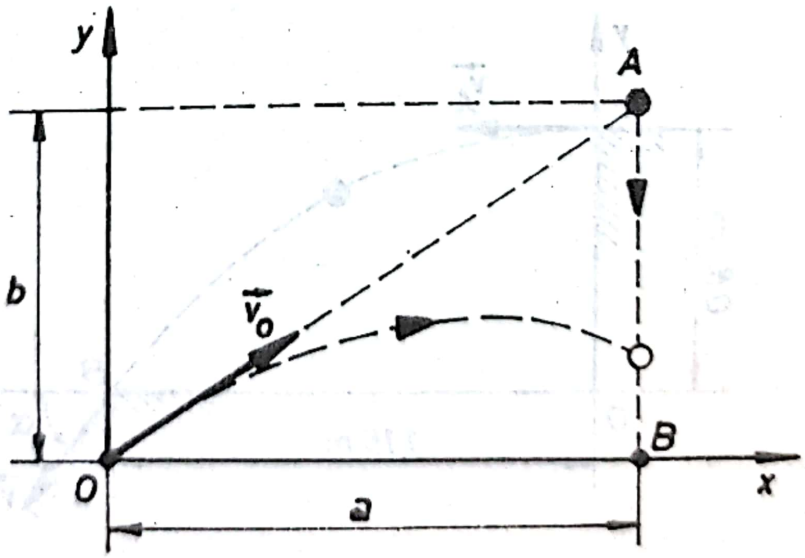


Fig. 1.3

Scanned with OKEN Scanner

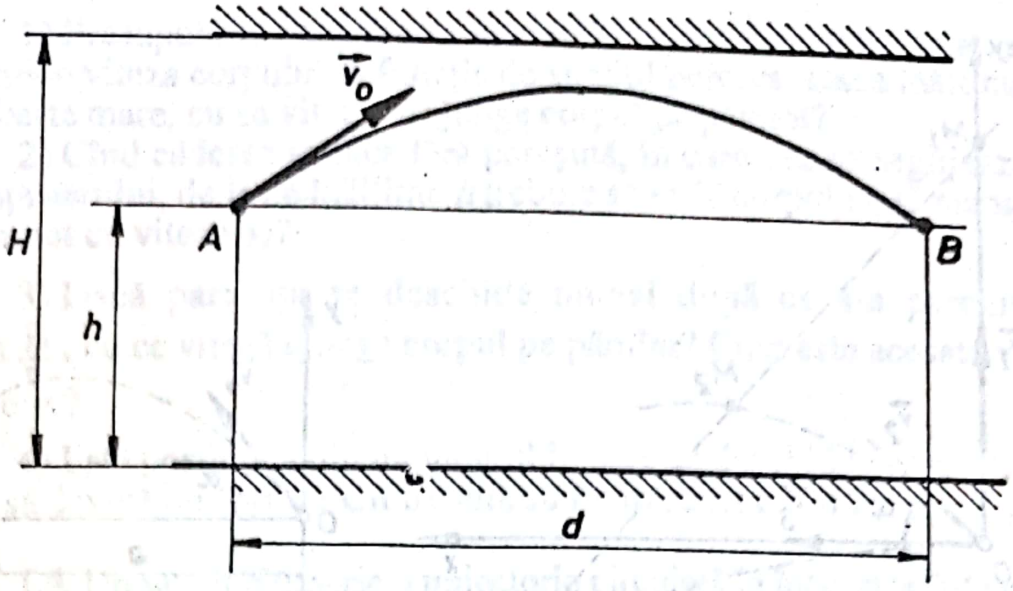


Fig. 1.4

1.4. Din punctul A, situat la înălţimea $h=1{,}5$ m faţă de suprafaţa podelei, se aruncă oblic un corp cu viteza $v_0=10$ m/s (fig. 1.4).

1) Tavanul fiind la înălţimea $H=2{,}5$ m, care este valoarea maximă posibilă a distanţei $d=AB$ (bătaia aruncării)?

2) Care este valoarea minimă a lui H de la care bătaia maximă nu depinde de H? Ce valoare are în acest caz bătaia maximă?

1.5. În acelaşi moment şi din acelaşi punct 0 se lansează în cîmp gravitaţional trei mobile cu vitezele iniţiale $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, situate în acelaşi plan, reprezentate în fig. 1.5. Să se determine relaţia care trebuie să existe între mărimile vitezelor iniţiale astfel încît în tot timpul mişcării cele trei puncte M_1, M_2, M_3 să rămînă coliniare.

1.6. Un proiectil care porneşte din originea sistemului de referinţă $x0y$ trebuie să nimerească o ţintă avînd coordonatele $a=295$ m, $b=52$ m (fig. 1.6). Neglijînd rezistenţa aerului, să se determine:

1) Viteza iniţială v_0 minimă necesară pentru atingerea ţintei şi unghiul de lansare α corespunzător.

2) Unghiul de lansare, dacă viteza iniţială a proiectului este de $n=1{,}6$ ori mai mare decît valoarea minimă, determinată la punctul 1).

3) Durata mişcării proiectului în cele două cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

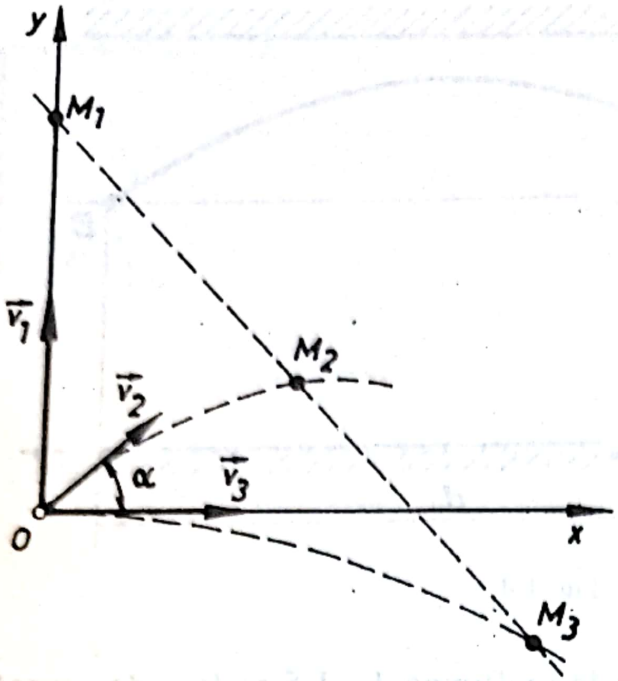


Fig. 1.5

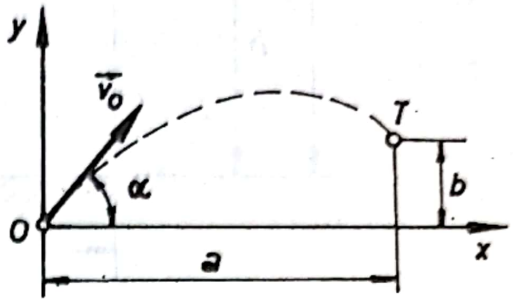


Fig. 1.6

1.7*. O stropitoare, folosită pentru stropirea plantelor, este aşezată pe o suprafaţă plană, înclinată faţă de planul orizontal cu unghiul β (fig. 1.7).

Stropitoarea, de înălţime h, poate emite jet de apă în orice direcţie din spaţiu cu viteza iniţială v_0.

Neglijînd rezistenţa aerului, să se determine aria suprafeţei stropite.

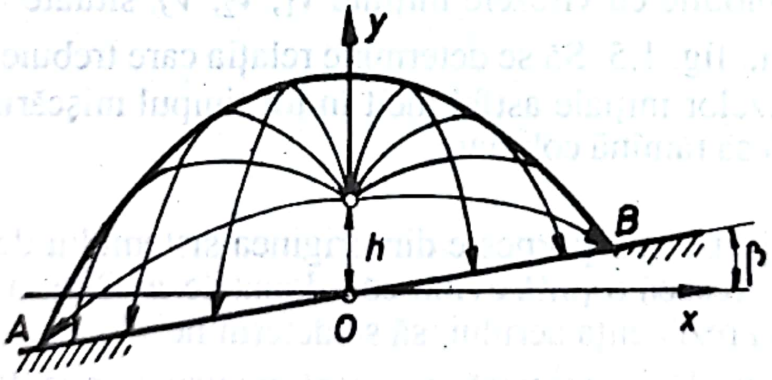


Fig. 1.7

1.8*. Un corp punctiform de masă m, prevăzut cu o paraşută, este lăsat să cadă liber de la înălţimea H. Din momentul în care se deschide paraşuta, acţionează asupra corpului forţa de rezistenţă a aerului, proporţională cu pătratul vitezei, avînd mărimea $R_a=kmv^2$.

Scanned with OKEN Scanner

1) Presupunînd că paraşuta se deschide în momentul iniţial, să se determine viteza corpului în funcţie de spaţiul parcurs. Dacă înălţimea H este foarte mare, cu ce viteză v_l ajunge corpul pe pămînt?

2) Cînd căderea se face fără paraşută, în care caz se neglijează rezistenţa aerului, de la ce înălţime h trebuie să cadă corpul ca să ajungă pe pămînt tot cu viteza v_l?

3) Dacă paraşuta se deschide numai după ce s-a parcurs un spaţiu $\frac{H}{n}$, cu ce viteză ajunge corpul pe pămînt? Cum este această viteză faţă de v_l?

4) Este posibil ca din momentul în care se deschide paraşuta, mişcarea să devină uniformă? Cît trebuie să fie în acest caz n?

1.9. Un satelit S descrie o traiectorie circulară la înălţimea h deasupra Pămîntului (fig. 1.9). Să se determine:

1) Viteza satelitului în funcţie de h, caz particular h=300 km.

2) Perioada de revoluţie a satelitului tot în funcţie de h.

3) La ce înălţime h trebuie să zboare satelitul pentru ca el să fie staţionar faţă de Pămînt şi cît de mare este în acest caz viteza lui?

Se dau: raza Pămîntului $R \approx 6370$ km şi acceleraţia gravitaţională g=9,81 m/s^2.

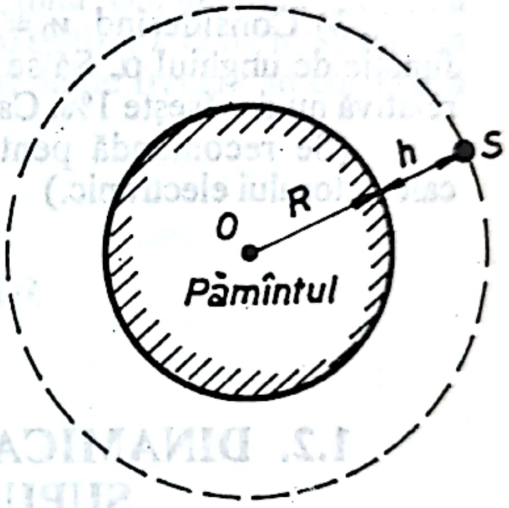


Fig. 1.9

1.10. Primul satelit artificial al Pămîntului lansat la 4 oct. 1957 avea perioada de revoluţie T=96,2 minute, perigeul la altitudinea h_p=229 km, iar apogeul la h_a=946 km.

Pe baza acestor date să se determine:

1) Masa m_p a Pămîntului.

2) Viteza minimă şi viteza maximă ale satelitului.

Se dau: constanta atracţiei gravitaţionale f=6,673 $10^{-11} \frac{m^4}{Ns^4}$ şi raza Pămîntului $R \approx 6370$ km.

1.11. Pentru nava Satelit Voshod-2 se cunosc următoarele date: perioada de revoluţie T_1=90,9 minute, înălţimea la apogeu h_{a1}=495 km, înălţimea la perigeu h_{p1}=173 km.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine perioada de revoluţie T_2 a satelitului Telstar pentru care înălţimea la apogeu este h_{a2}=5640 km, iar la perigeu h_{p2}=954 km. Raza pămîntului este R≈6 370 km.

1.12.* Parabola pe care se mişcă un punct material greu, aruncat oblic în vid, este de fapt aproximarea traiectoriei eliptice ce rezultă în cazul forţei de atracţie newtoniene.

1) Să se determine în funcţie de viteza iniţială v_0 şi unghiul de lansare α eroarea absolută şi relativă ce se obţine la determinarea bătăii aruncării cu ajutorul parabolei, faţă de valoarea exactă, determinată pe baza elipsei. Se va considera că aruncarea se face de pe suprafaţa Pămîntului.

2) În cazul α=45°, să se studieze variaţia erorii în funcţie de viteza iniţială v_0. Cît de mare este eroarea pentru v_0=500 m/s şi v_0=790,5 m/s (a zecea parte a primei viteze cosmice)? La ce viteză iniţială rezultă o eroare relativă de 1%?

3) Considerînd v_0=790,5 m/s, să se studieze variaţia erorii în funcţie de unghiul α. Să se arate că la această viteză de lansare eroarea relativă nu depăşeşte 1%. Care este în acest caz eroarea absolută maximă?

(Se recomandă pentru rezolvarea punctelor 2) şi 3) folosirea calculatorului electronic.)

1.2. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

1.13. O scîndură de lăţime d se află într-un plan vertical, formînd cu orizontala unghiul α. În scîndură există un canal drept AB care formează cu verticala unghiul θ. În acest canal este lăsată să cadă din A, fără viteza iniţială, o bilă de masă m. Coeficientul de frecare dintre bilă şi scîndură este μ=tg φ.

Să se determine:

1) Legea mişcării bilei.

2) Viteza v_B cu care ajunge în B.

3) Timpul t_{AB} în care ajunge în B.

4) Valoarea unghiului θ pentru care timpul t_{AB} este minim şi valoarea timpului minim.

Scanned with OKEN Scanner

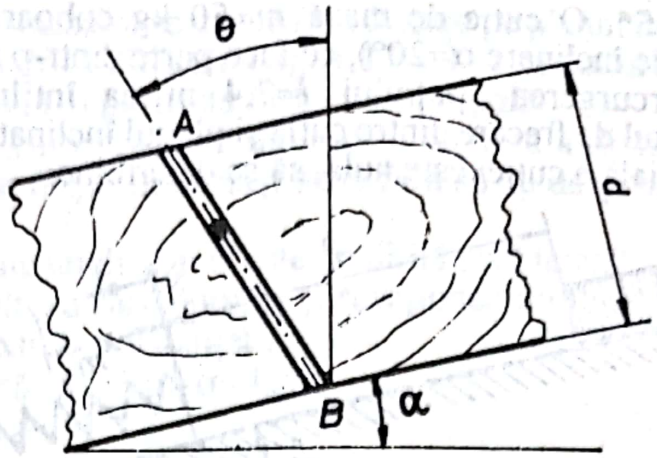


Fig. 1 13

1.14. Un corp punctiform de masă $m=1{,}6$ kg se mişcă pe un plan înclinat, pornind din punctul A fără viteză iniţială. Unghiul de înclinare a planului este $\alpha=45°$. După ce corpul parcurge spaţiul $l=2$ m, întîlneşte un arc cu constanta elastică $k=6400$ N/m. Forţele de frecare se consideră neglijabile.

Să se determine:

1) Viteza cu care ajunge corpul în B.

2) Timpul în care s-a parcurs spaţiul AB.

3) Deformaţia maximă a arcului.

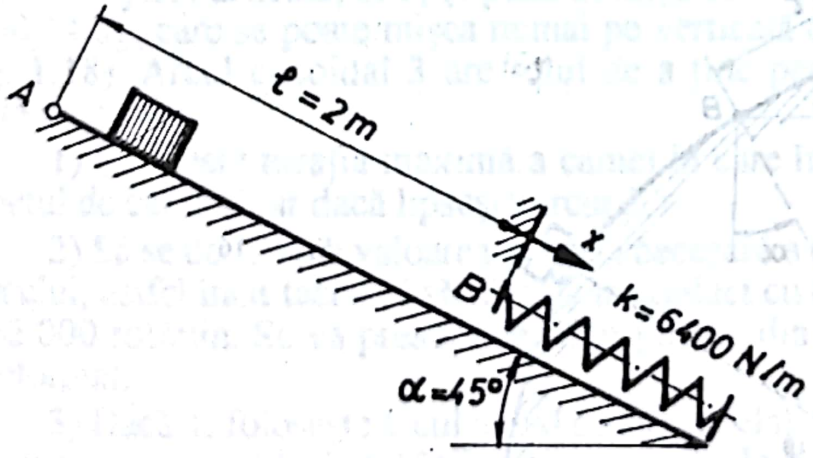


Fig. 1.14

Scanned with OKEN Scanner

1.15*. O cutie de masă m=50 kg coboară pe un plan înclinat (unghiul de înclinare α=20°), ce face parte dintr-o instalaţie de transport. După parcurgerea spaţiului l=2,4 m ea întîlneşte un arc elastic. Coeficientul de frecare dintre cutie şi planul înclinat este μ=0,23. Ştiind că viteza iniţială a cutiei este nulă, să se determine:

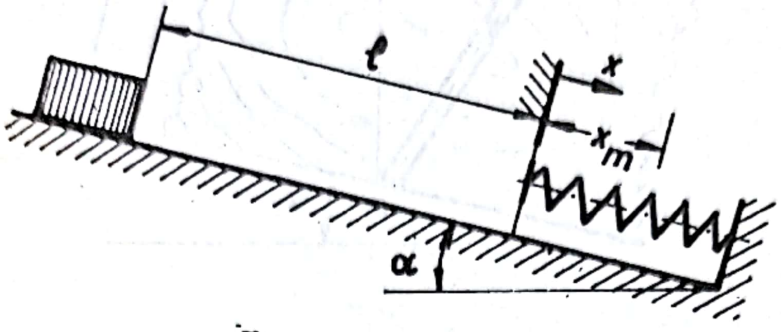


Fig. 1.15

1) Acceleraţia a_1 a cutiei pe planul înclinat şi viteza v_1 cu care ajunge în dreptul arcului.

2) Constanta elastică k a arcului astfel încît mărimea acceleraţiei să nu depăşească 4 g.

3) Deformaţia maximă x_m a arcului şi forţa elastică maximă din arc.

4) Durata mişcării cutiei din poziţia iniţială pînă la oprire.

1.16*. Un cărucior se mişcă fără frecare pe un plan înclinat (de-a lungul unei linii de cea mai mare pantă), apoi pe o suprafaţă cilindrică de rază R (fig. 1.16). În momentul iniţial căruciorul se află în poziţia A şi porneşte cu viteza iniţială nulă.

1) Să se determine poziţia în care căruciorul se desprinde de suprafaţa cilindrică şi viteza lui în momentul desprinderii.

2) Aplicaţie numerică: l=10 m; R=20 m; α=30°.

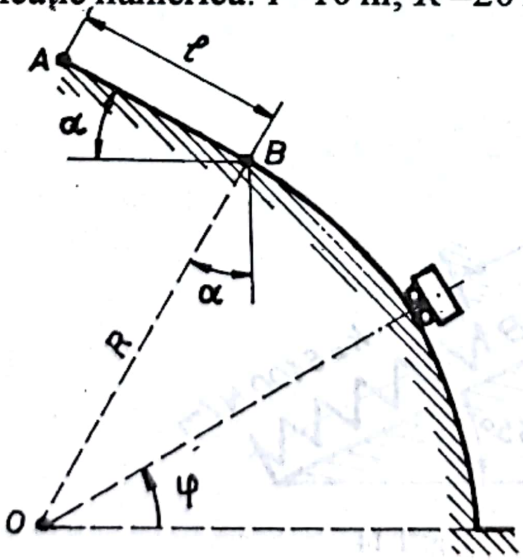


Fig. 1.16

1.17. Un cărucior de masă m se mişcă fără frecare pe planul înclinat AB, apoi pe suprafaţa cilindrică $BCDEF$ (fig. 1.17.). În momentul iniţial căruciorul se află în poziţia A şi porneşte fără viteza iniţială.

1) Să se determine valoarea minimă şi cea maximă a distanţei l astfel încît căruciorul să se mişte în acelaşi sens fără să se desprindă de traiectoria impusă.

2) Pentru ce valori ale unghiului α este posibilă problema?

3) Să se calculeze viteza căruciorului şi reacţiunea normală în poziţia E pentru valoarea maximă a distanţei l.

4) Aplicaţie numerică: $R=5$ m, $\alpha=40°$.

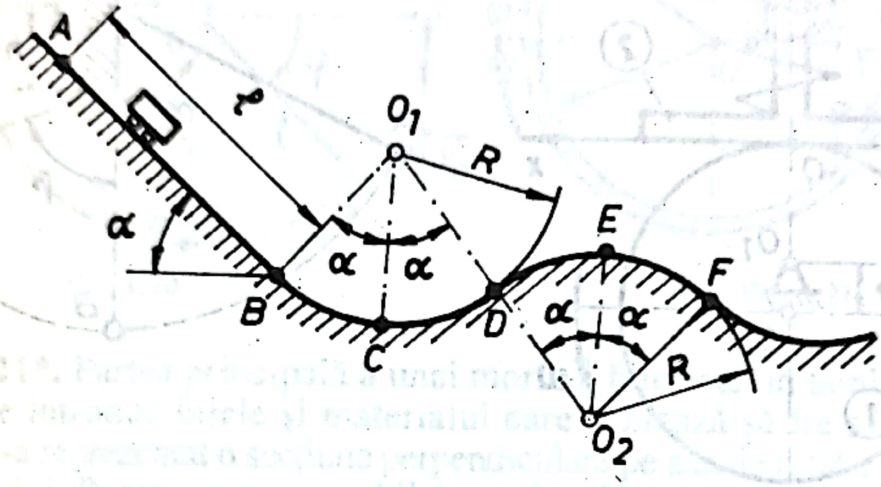


Fig. 1.17

1.18*. Cama 1 sub formă de disc excentric ($e=2$ mm) se roteşte uniform în jurul articulaţiei O_1 şi pune în mişcare tachetul plan 2 de masă $m=0{,}24$ kg, care se poate mişca numai pe verticală de-a lungul axei Oy (fig. 1.18). Arcul elicoidal 3 are rolul de a ţine permanent tachetul în contact cu cama.

1) Care este turaţia maximă a camei la care încă nu se desprinde tachetul de camă chiar dacă lipseşte arcul 3.

2) Să se determine valoarea minimă necesară a constantei elastice k a arcului, astfel încît tachetul să rămînă în contact cu cama pînă la turaţia $n_1=2\,000$ rot/min. Se va presupune că în poziţia din fig. 1.18 arcul este nedeformat.

3) Dacă se foloseşte arcul avînd constanta elastică găsită la punctul 2) pentru a menţine tachetul în contact cu cama la turaţii mai mari decît $n_1=2\,000$ rot/min, arcul trebuie pretensionat (comprimare iniţială). Cît de

Scanned with OKEN Scanner

mare trebuie să fie deformaţia δ a arcului cînd mecanismul este în poziţia din fig. 1.18 pentru ca tachetul să rămînă în contact cu cama pînă la turaţia n_2=2 500 rot/minut.

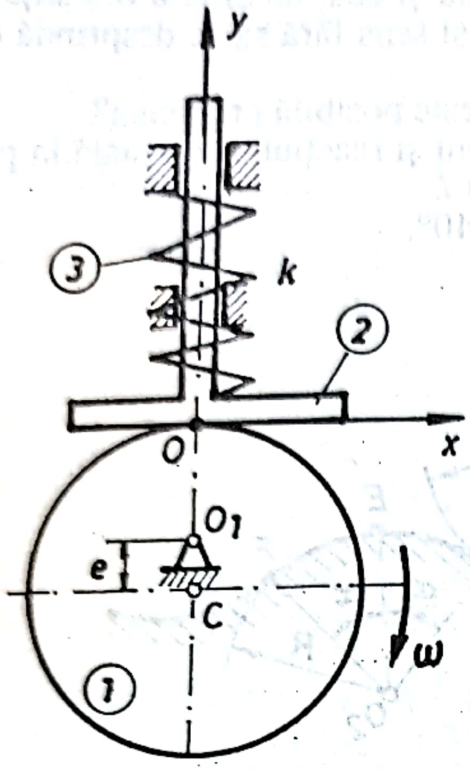


Fig. 1.18

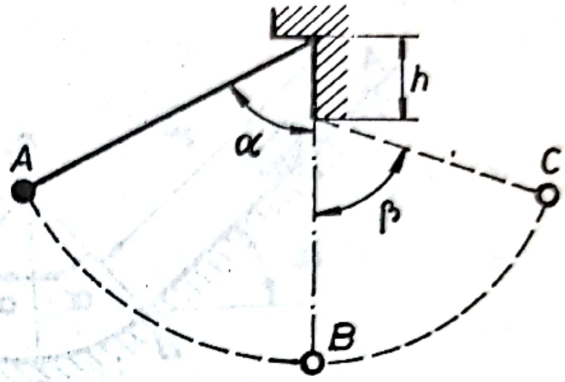


Fig. 1.19

1.19. O bilă de masă m=0,5 kg este legată de capătul unui fir de lungime l=0,8 m. În momentul iniţial firul formează cu verticala unghiul α=60°. Din această poziţie porneşte bila fără viteză iniţială. În momentul în care firul ajunge în poziţia verticală întîlneşte un perete (h=0,2 m) şi bila îşi continuă mişcarea ca un pendul matematic de lungime l–h.

Să se determine:

1) Energia cinetică şi viteza bilei în poziţia B.

2) Tensiunea din fir în aceeaşi poziţie.

3) Unghiul β de deviere a firului spre dreapta.

1.20. O bilă mică de masă m este legată de un fir de lungime l, avînd celălalt capăt fixat în punctul O. În momentul iniţial firul este orizontal şi în această poziţie i se imprimă bilei viteza iniţială verticală $\vec{v}_0$

Scanned with OKEN Scanner

(fig. 1.20). Cînd firul devine din nou orizontal întîlneşte un opritor (un cui) O_1 $\left(OO_1=\frac{l}{3}\right)$.

1) Să se determine viteza bilei în funcţie de poziţia ei şi tensiunea din fir.

2) Care este condiţia ca bila să ajungă în poziţia D ?.

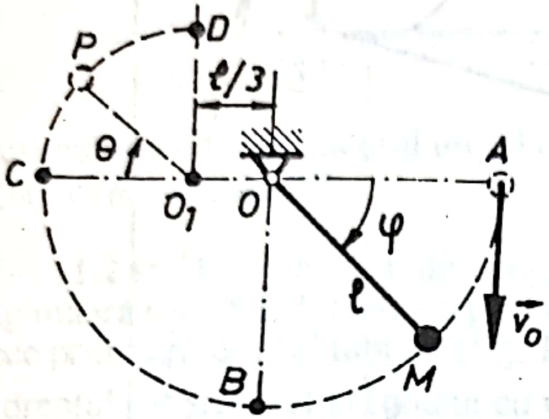


Fig. 1.20

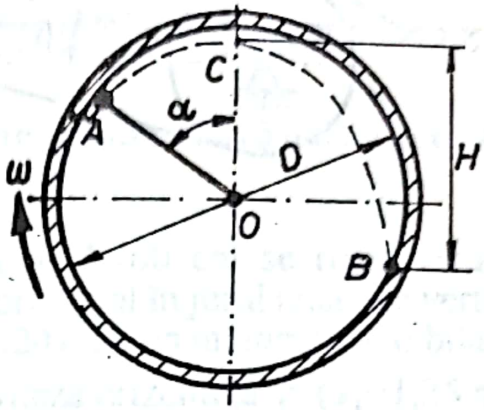


Fig. 1.21

1.21*. Partea principală a unei mori cu bile este un tambur rotativ în care se introduc bilele şi materialul care urmează să fie sfărîmat. În fig. 1.21 s-a reprezentat o secţiune perpendiculară pe axa de rotaţie orizontală a tamburului. Pentru antrenarea bilelor există în tambur o placă fixată de el de-a lungul unei generatoare. Se dă diametrul interior D=710 mm. Considerînd bila punctiformă şi lăţimea plăcii de antrenare foarte mică (neglijabilă faţă de diametrul tamburului), să se determine:

1) Valoarea unghiului α (fig. 1.21) în momentul în care bila se desprinde de tambur dacă turaţia lui este n=30 rot/minut.

2) Turaţia optimă la care înălţimea H de cădere a bilei este maximă.

1.22*. Pe banda transportoare din fig. 1.22, ce se mişcă cu viteza constantă v_0=0,5 m/s, se află o particulă P. Coeficientul de aderenţă dintre bandă şi particulă este μ_0=0,4. Roţile care antrenează banda au aceeaşi rază R=0,25 m. Unghiul β, indicat în figură, este de 18°.

1) Să se verifice dacă particula nu alunecă în jos pe porţiunea dreaptă a benzii transportoare. Care ar fi valoarea maximă posibilă a unghiului β?

2) Să se verifice dacă particula nu alunecă pe bandă pe porţiunea LM a traiectoriei. La ce valoare a vitezei de deplasare a benzii s-ar produce alunecarea?

714.617

BIBLIOTECA JUDEŢEANĂ "GH. ASACHI" IAŞI

Scanned with OKEN Scanner

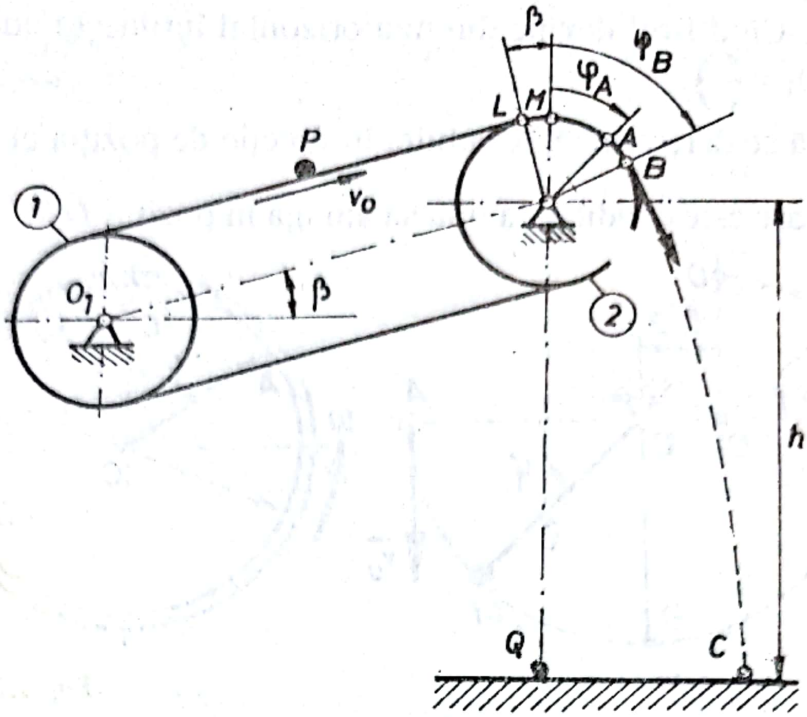


Fig. 1.22

3) Să se determine poziţia A (unghiul φ_A) a particulei pe roata 2, în care particula începe să alunece pe bandă înainte.

4) Considerînd frecarea de alunecare neglijabilă, să se determine poziţia B (unghiul φ_B) a particulei, în care ea părăseşte banda şi viteza absolută a ei în această poziţie.

5) Să se determine poziţia punctului C (distanţa QC) în care particula ajunge pe planul orizontal, ştiind că h=2 m. Rezistenţa aerului se consideră neglijabilă.

1.3. DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

1.23. Un cărucior de masă m se poate deplasa fără frecare pe un plan înclinat, care la rîndul lui se mişcă pe un plan orizontal cu acceleraţia constantă a_0 (fig. 1.23). Să se studieze mişcarea relativă a căruciorului

Scanned with OKEN Scanner

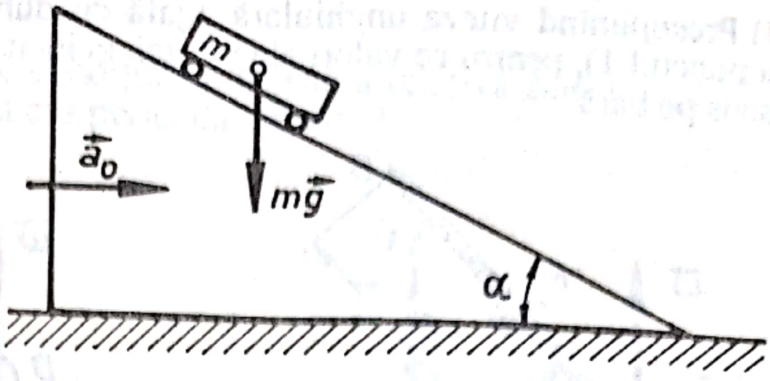


Fig. 1.23

presupunînd că în momentul inițial are viteza relativă nulă. Care este condiția de repaus relativ?

1.24*. Un tub OA de lungime l=60 cm se rotește cu viteza unghiulară ω=1,5 rad/s într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale ce trece prin capătul O al tubului (fig. 1.24). La un moment dat o bilă ajunge în dreptul capătului A al tubului cu viteza orizontală $\vec{v}_1$ (v_1=1,26 m/s), ce formează cu axa tubului unghiul α.

Să se detrmine:

1) Valoarea unghiului α astfel încît bila să intre lin în tub (fără ciocnire).

2) Distanța parcursă de bilă în interiorul tubului.

3) Viteza $\vec{v}_2$ cu care bila părăsește tubul și unghiul β dintre $\vec{v}_2$ și axa tubului.

4) Unghiul de rotație al tubului în timp ce bila se află în interiorul lui.

5) Durata mișcării bilei în tub.

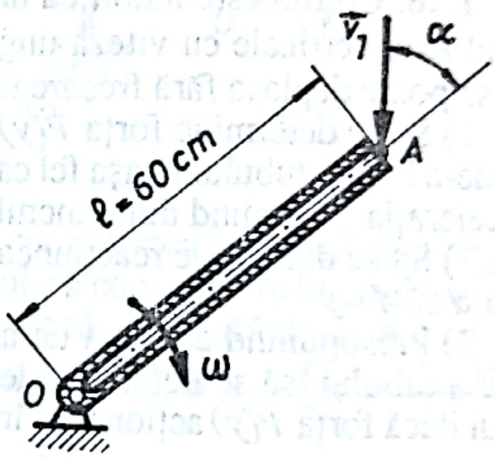


Fig. 1.24

1.25. O bară netedă dreaptă AB, de lungime l, înclinată cu un unghi constant α față de orizontală, se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe verticale ce trece prin extremitatea A a barei (fig. 1.25). Pe bară se află un inel mic M de masă m.

1) Pentru ce valori ale vitezei unghiulare există poziții de repaus relativ ale inelului pe bară?

2) Să se determine legea mișcării relative și reacțiunea barei, dacă inelul este lansat din A cu viteza relativă inițială v_0.

Scanned with OKEN Scanner

3) Presupunînd viteza unghiulară egală cu dublul valorii limită găsite la punctul 1), pentru ce valori ale vitezei v_0 inelul se deplasează în acelaşi sens pe bară?

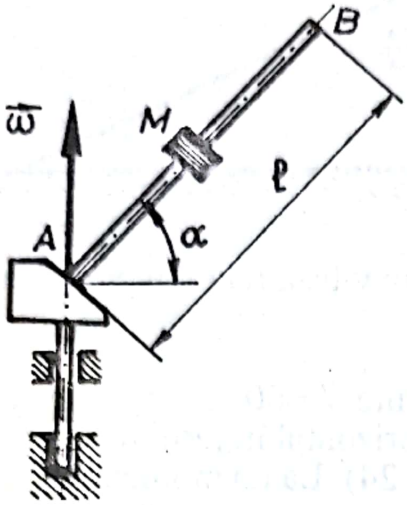


Fig. 1.25

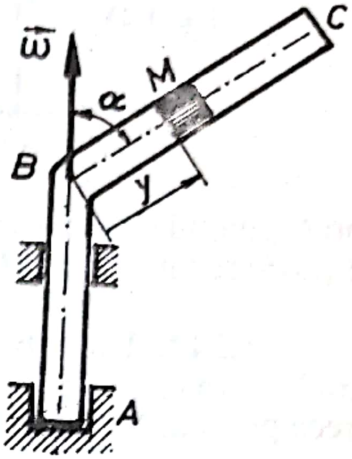


Fig. 1.26

1.26. Un tub este îndoit cu unghiul α faţă de verticală şi se roteşte în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$. În interiorul tubului se poate deplasa fără frecare un corp punctiform M de masă m.

1) Să se determine forţa $P(y)$ care trebuie să acţioneze asupra corpului de-a lungul tubului în aşa fel ca mişcarea lui să fie uniform accelerată cu acceleraţia a, pornind din punctul B fără viteză iniţială.

2) Să se determine reacţiunea tubului asupra corpului în funcţie de distanţa $BM=y$.

3) Presupunînd că după un anumit timp T se opreşte mişcarea de rotaţie a tubului, să se determine legea mişcării corpului M în interiorul tubului dacă forţa $P(y)$ acţionează în continuare.

1.27. În discul din fig. 1.27., ce se află într-un plan orizontal, s-a realizat canalul drept AB, situat la distanţa h de centrul acestuia. În acest canal se poate deplasa fără frecare culisorul C de greutate G, care este legat de două arcuri identice, avînd fiecare constanta elastică $\frac{k}{2}$. În poziţia de echilibru O' (mijlocul canalului AB) a culisorului arcurile sînt nedeformate.

1) Să se determine ecuaţia diferenţială scalară a mişcării relative a culisorului, dacă discul se roteşte în jurul axei verticale ce trece prin centrul său O cu viteza unghiulară constantă ω.

Scanned with OKEN Scanner

2) Care este condiţia ca mişcarea relativă să fie oscilatorie şi ce valoare are în acest caz perioada mişcării?

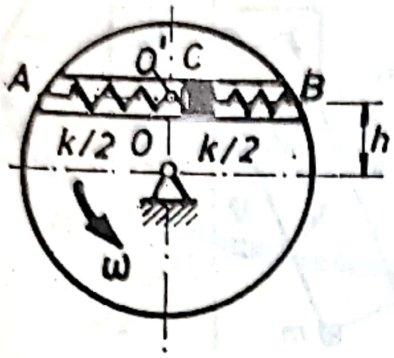


Fig. 1.27

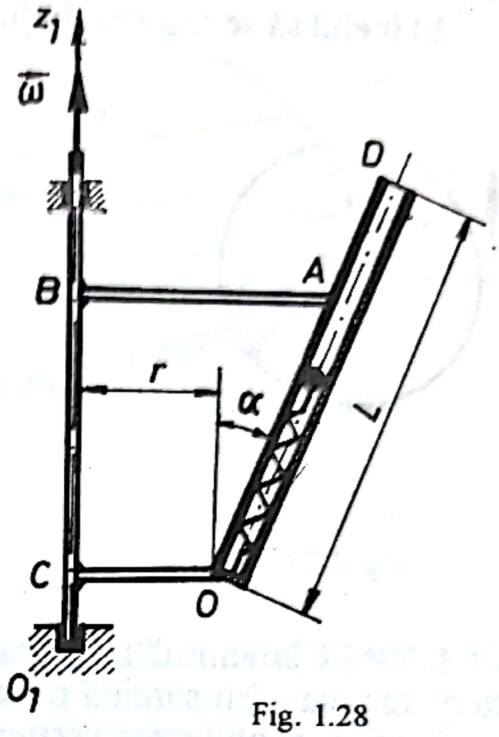


Fig. 1.28

1.28*. Tubul OD, de lungime L care formează cu verticala unghiul α (fig. 1.28), se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei verticale O_1z_1. În tub se găseşte o bilă de masă m, legată de un arc cu constanta elastică k, avînd în stare nedeformată lungimea l_0 $\left(k > \frac{mg\cos\alpha}{l_0}\right)$

Se mai cunoaşte distanţa $CO=r$.

Forţele de frecare se consideră neglijabile.

1) Să se determine poziţia de repaus relativ a bilei şi reacţiunea tubului în această poziţie.

2) Să se studieze mişcarea relativă a bilei presupunînd că în momentul iniţial ea se află în poziţia în care arcul este nedeformat şi are viteza relativă iniţială nulă.

1.29. O circumferinţă netedă de sîrmă, de rază r, situată într-un plan vertical, are o mişcare verticală de translaţie ascendentă cu acceleraţie constantă a. Pe circumferinţa de sîrmă se află un inel de masă m.

1) Să se determine viteza unghiulară relativă a inelului, precum şi reacţiunea N a circumferinţei, dacă la momentul $t=0$, $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = \omega_0$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $\theta_0 = 0$, să se stabilească viteza unghiulară inițială ω_0 astfel încît:

a) inelul să oscileze între $\theta = -\frac{\pi}{2}$ și $\theta = \frac{\pi}{2}$;

b) inelul să se rotească în jurul circumferinței.

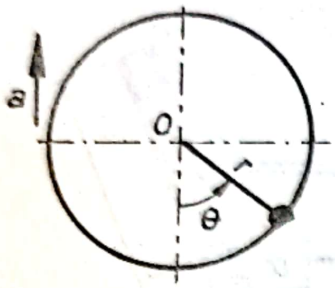


Fig. 1.29

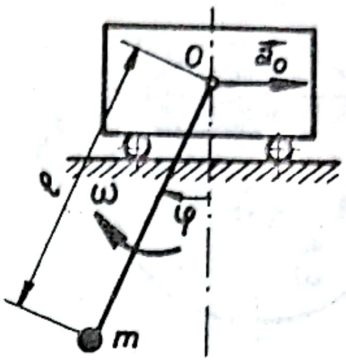


Fig. 1.30

1.30*. Cărucior ul unei macarale susține, prin intermediul unui cablu de lungime l, o sarcină punctiformă de masă m (fig. 1.30). În momentul inițial, cablul este vertical și sarcina se află în repaus. La un moment dat, cărucior ul începe să se deplaseze cu accelerația constantă $\vec{a}_0$.

Să se determine:

1) Viteza unghiulară ω a sarcinii în funcție de unghiul φ și valoarea maximă a unghiului φ.

2) Tensiunea maximă din cablu.

1.31. Un disc de rază r se rotește uniform într-un plan vertical cu viteza unghiulară ω. De acest disc este legat prin articulație o bară dreaptă AB de lungime l și de greutate neglijabilă, avînd la capătul B o masă concentrată m.

Se cere să se studieze mișcarea relativă a acestei mase, neglijînd greutatea mg.

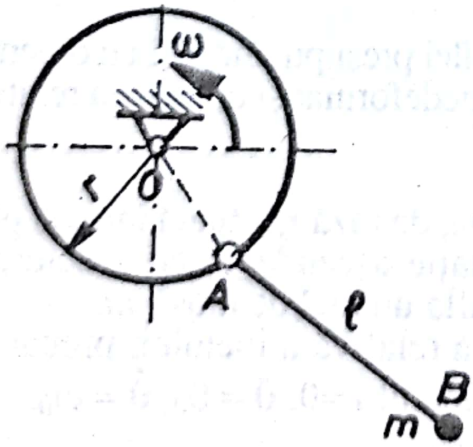


Fig. 1.31

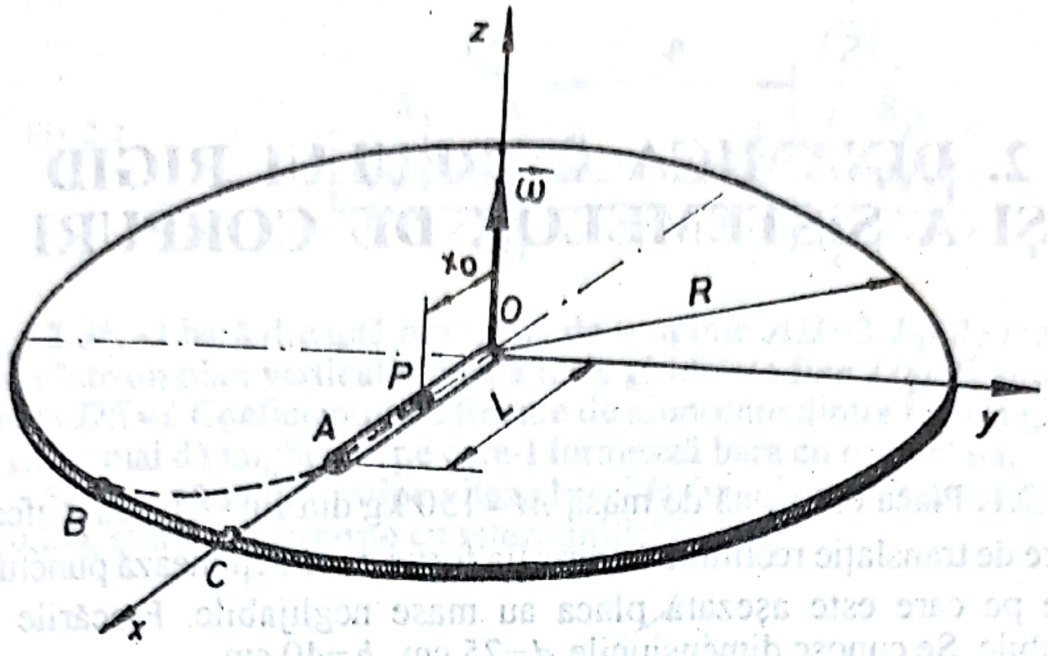


Fig. 1.32

1.32. Placa circulară de rază R din fig. 1.32, ce se află într-un plan orizontal, se roteşte în jurul axei sale de simetrie verticale cu viteza unghiulară constantă ω. Pe placă se află, solidar legat de ea, tubul OA de lungime $L<R$. În tub se găseşte o bilă de masă m. Ştiind că în momentul iniţial bila se află în poziţia $P(OP=x_0)$ şi porneşte cu viteză relativă nulă, să se determine:

1) Durata t_1 a mişcării bilei în tub şi viteza ei relativă v_{r1} în momentul în care iese din tub.

2) Durata t_2 a mişcării bilei pe placă din momentul în care iese din tub pînă în momentul în care părăseşte placa în punctul B.

3) Unghiul de rotaţie α al plăcii din momentul iniţial pînă în momentul în care bila părăseşte placa.

4) Unghiul β dintre direcţiile OB, OC şi lungimea arcului de cerc $\overset{\frown}{BC}$.

Frecările se consideră neglijabile.

Scanned with OKEN Scanner

2. DINAMICA CORPULUI RIGID ŞI A SISTEMELOR DE CORPURI

2.1. Placa omogenă de masă $M=150$ kg din fig. 2.1 poate efectua mişcare de translaţie rectilinie în direcţia forţei $\vec{F}$, ce acţionează punctul A. Rolele pe care este aşezată placa au mase neglijabile. Frecările sînt neglijabile. Se cunosc dimensiunile $d=75$ cm, $h=40$ cm.

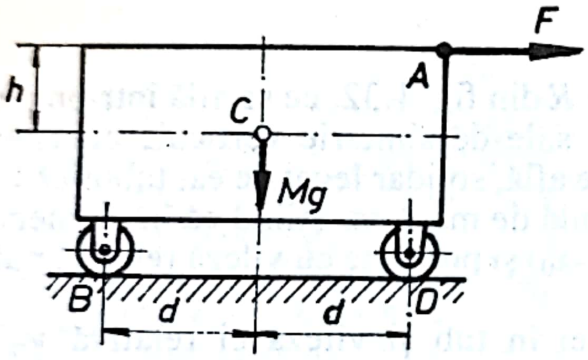


Fig. 2.1

Să se determine:

1) Acceleraţia plăcii şi reacţiunile N_B şi N_D ale planului orizontal în punctele B şi D dacă $F=540$ N.

2) Forţa maximă F_{max} aplicabilă plăcii fără ca aceasta să se răstoarne în jurul punctului D, acceleraţia corespunzătoare şi valoarea reacţiunii N_D în acest caz.

2.2. Corpurile 1 şi 2 de mase m_1, respectiv m_2 sînt fixate de bara AB de masă neglijabilă şi sînt legate de arcurile avînd constantele elastice k_1, respectiv k_2 (fig. 2.2). Ele se pot mişca în direcţia axei barei AB. În poziţia de echilibru a sistemului arcurile sînt nedeformate.

Ştiind că în momentul iniţial deformaţia arcurilor este x_0 şi viteza sistemului este nulă, să se determine:

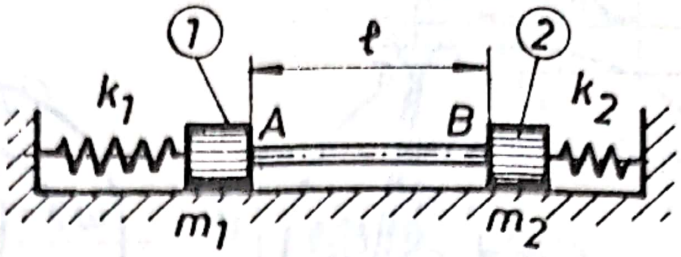
1) Legea mişcării sistemului.

2) Efortul din bara AB.

3) Condiţia ca efortul să fie nul.

Scanned with OKEN Scanner

Fig. 2.2



2.3*. O bară dreaptă omogenă de lungime $AB=3l$ şi de masă m, situată într-un plan vertical alunecă între ghidajele fixe D şi E, situate la distanţa $DE=l$. Coeficientul de frecare de alunecare dintre bară şi ghidaje este μ. Se mai dă unghiul α pe care-l formează bara cu orizontala.

Se cere să se determine viteza barei în funcţie de distanţa x pentru $x \in [0,2l]$, ştiind că porneşte cu viteza iniţială nulă.

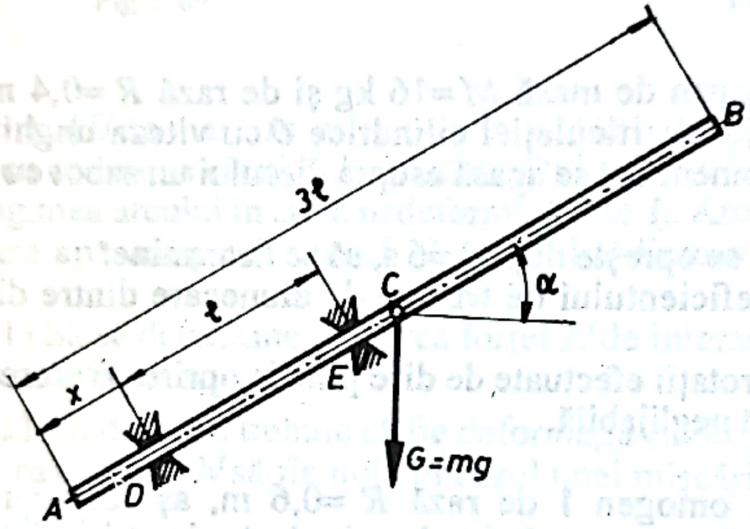


Fig. 2.3

2.4. Corpul 1, de greutate G_1 din fig. 2.4 este susţinut cu ajutorul a două bare drepte identice AD şi BE, de lungime l, avînd greutăţi neglijabile, legate de corp în punctele A şi B şi de un suport fix în D şi E prin articulaţii cilindrice. Pe corpul 1 se aşază un alt corp 2 de greutate G_2. Punctele A, B, D, E, şi centrele de greutate C_1 şi C_2 se află în acelaşi plan vertical şi $DE=AB=2d$. În momentul iniţial $\theta = \theta_0$ şi $\dot{\theta} = 0$.

Să se determine:

1) Cum depinde perioada oscilaţiilor de poziţia corpului 2 pe corpul 1 (distanţa x)?

2) Eforturile din cele două bare în funcţie de unghiul θ.

Scanned with OKEN Scanner

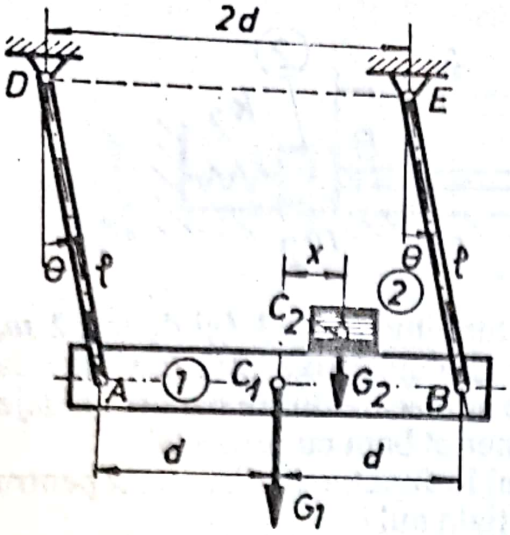


Fig. 2.4

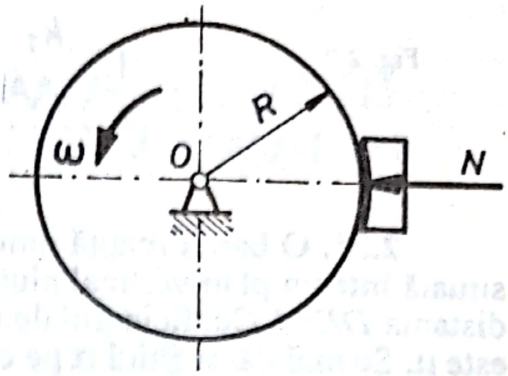


Fig. 2.5

2.5. Discul omogen de masă M=16 kg şi de rază R=0,4 m din fig. 2.5 se roteşte în jurul articulaţiei cilindrice O cu viteza unghiulară ω_0=20 rad/s. La un moment dat se apasă asupra discului un sabot cu forţa N=100 N.

Ştiind că discul se opreşte după t_1=6 s, să se determine:

1) Valoarea coeficientului de frecare de alunecare dintre disc şi sabot.

2) Numărul de rotaţii efectuate de disc pînă la oprire. Frecarea din articulaţie se consideră neglijabilă.

2.6*. Cilindrul omogen 1 de rază R=0,6 m, aşezat pe rolele cilindrice 2 şi 3 (fig. 2.6), se roteşte în jurul axei sale de simetrie orizontale cu viteza unghiulară constantă ω_0=5,6 rad/s. La un moment dat rolele se opresc brusc.

Să se determine:

1) Legea mişcării cilindrului după oprirea rolelor.

2) Timpul în care cilindrul se opreşte şi unghiul de rotaţie pînă la oprire.

Se dau: unghiul α=30°, coeficientul de frecare dintre cilindru şi role μ=0,09.

2.7*. În fig. 2.7 este reprezentată schema simplificată a unui regulator de turaţie folosit la motoare electrice. Pe un disc orizontal, ce se roteşte în jurul axei verticale ce trece prin centrul lui O_1, se află bara

Scanned with OKEN Scanner

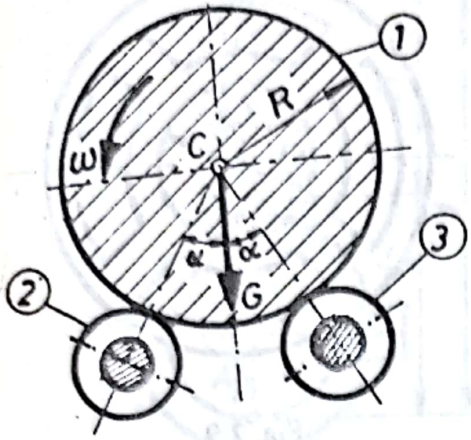


Fig. 2.6

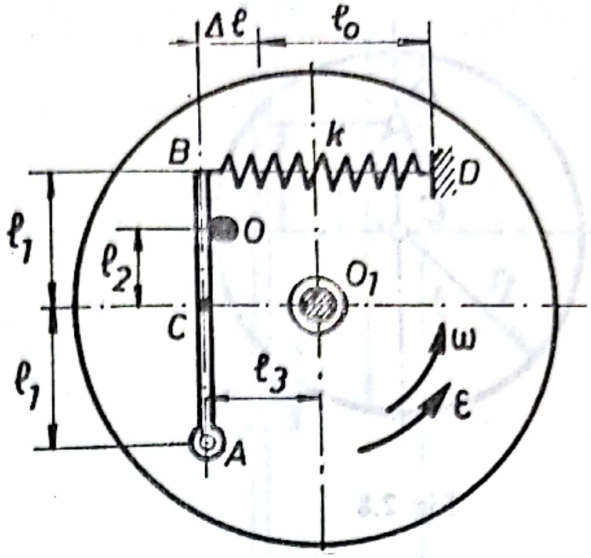


Fig. 2.7

omogenă AB de masă m, articulată în A. De bară este legat în punctul B un arc cu constanta elastică k, avînd capătul celălalt fixat de disc în punctul D. Lungimea arcului în stare nedeformată este l_0. Arcul fiind pretensionat, ţine bara apăsată pe opritorul O. Celelalte dimensiuni sînt indicate în figură.

1) Să se determine valoarea forţei N de interacţiune dintre bară şi opritor în funcţie de ω şi ε.

2) Cît de mare trebuie să fie deformaţia Δl de pretensionare a arcului pentru ca forţa N să fie nulă în cazul unei mişcări de rotaţie uniforme cu turaţia n_0?

3) Aplicaţie numerică: l_1=30 mm; l_2=20 mm; l_3=20 mm; m=0,01 kg; k=0,2 N/mm; n_0=800 rot/minut.

2.8. Un disc omogen de rază R=15 cm efectuează mici oscilaţii într-un plan vertical în jurul unei axe orizontale, care este perpendiculară pe planul discului şi trece prin punctul O (fig. 2.8). Distanţa dintre punctul O şi centrul de greutate C al discului se notează cu d.

1) Să se determine lungimea redusă a acestui pendul fizic şi perioada micilor oscilaţii pentru $d=\frac{R}{2}$.

2) Să se determine valoarea lui d astfel încît perioada să fie minimă şi valoarea corespunzătoare a perioadei.

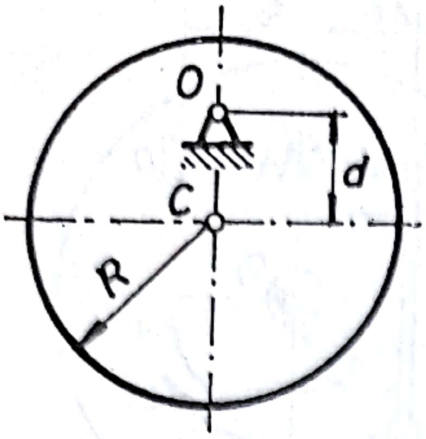


Fig. 2.8

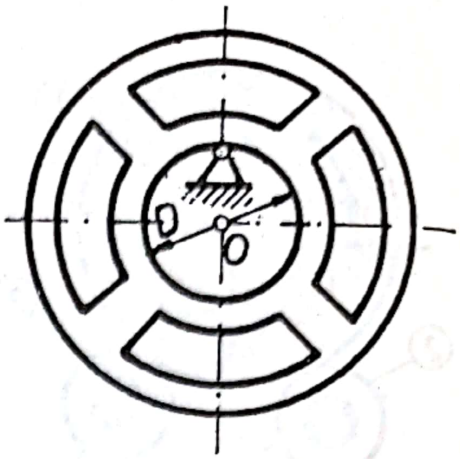


Fig. 2.9

2.9. Pentru a determina momentul de inerţie al unei roţi, roata se aşază pe un ax orizontal (fig. 2.9) şi se măsoară perioada micilor oscilaţii ale acesteia. Cunoscînd masa roţii M=1,66 kg, diametrul D=14,3 cm şi perioada micilor oscilaţii T=1,4 s, să se determine momentul de inerţie J al roţii în raport cu axa ei de simetrie perpendiculară pe planul figurii.

2.10. Pentru a determina momentul de inerţie al unei biele (fig. 2.10) se aplică următoarea metodă: se lasă biela să oscileze în jurul axului orizontal A_1 şi apoi în jurul lui A_2 şi se măsoară perioadele T_1 şi T_2 ale micilor oscilaţii în cele două cazuri. Cunoscînd masa M a bielei şi distanţa d, să se determine poziţia centrului de greutate şi momentul de inerţie J în raport cu axa orizontală ce trece prin centrul de greutate.

Aplicaţie numerică: M=1,64 kg, d=26,2 cm, T_1=0,95 s, T_2=0,85 s.

2.11. Bara dreaptă omogenă de lungime l şi de masă M din fig. 2.11 se poate roti într-un plan vertical în jurul articulaţiei cilindrice O. Pe bară se află corpul punctiform B de masă $m=\alpha M$ la distanţa x de extremitatea O a barei.

Să se determine:

1) Perioada micilor oscilaţii ale acestui pendul fizic în funcţie de distanţa x.

2) Valoarea lui x pentru care perioada coincide cu perioada barei fără corpul B.

3) Valoarea lui x pentru care perioada este minimă şi valoarea corespunzătoare a perioadei.

Scanned with OKEN Scanner

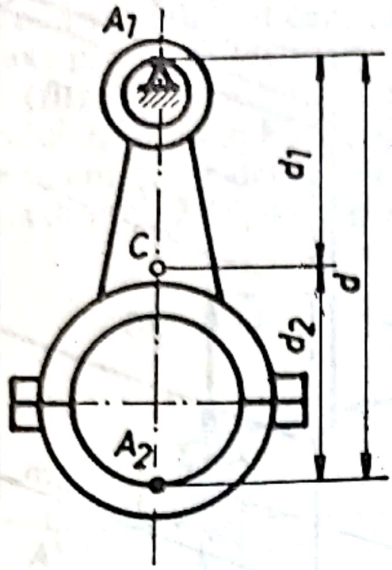


Fig. 2.10

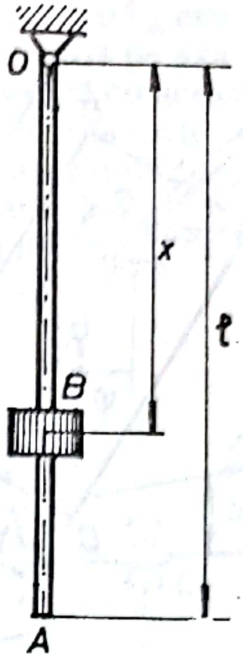


Fig. 2.11

2.12. O placă dreptunghiulară omogenă $ABED$ de masă M, avînd dimensiunile $AB=DE=b=\frac{1}{4}$, $AD=BE=$l, se poate roti fără frecare în jurul unei axe orizontale, care trece prin punctul O, situat pe axa de simetrie a plăcii (fig. 2.12). Axa de rotaţie este perpendiculară pe planul plăcii.

1) Să se determine distanţa d dintre punctele O şi C (centrul de greutate al plăcii) astfel încît perioada micilor oscilaţii să fie minimă şi perioada acestor oscilaţii în acest caz. Cît de mare trebuie să fie lungimea l pentru ca perioada minimă să fie egală cu o secundă?

2) Considerînd că placa porneşte din poziţia orizontală cu viteza unghiulară nulă, să se determine în funcţie de unghiul φ eforturile din barele articulate O_1O şi O_2O, ştiind că unghiul α este de 45°.

2.13*. Placă omogenă de masă $m=60$ kg din fig. 2.13 se roteşte în jurul axei verticale determinate de articulaţiile A şi B cu viteza unghiulară constantă $\omega=12$ rad/s.

Să se determine reacţiunile din lagărele A şi B.

Scanned with OKEN Scanner

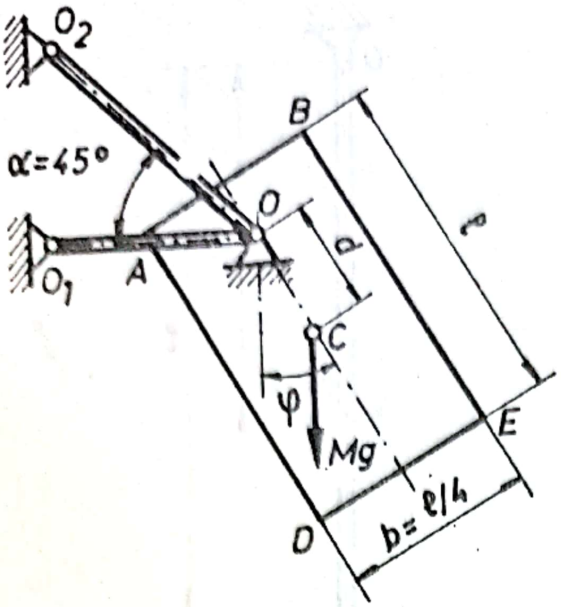


Fig. 2.12

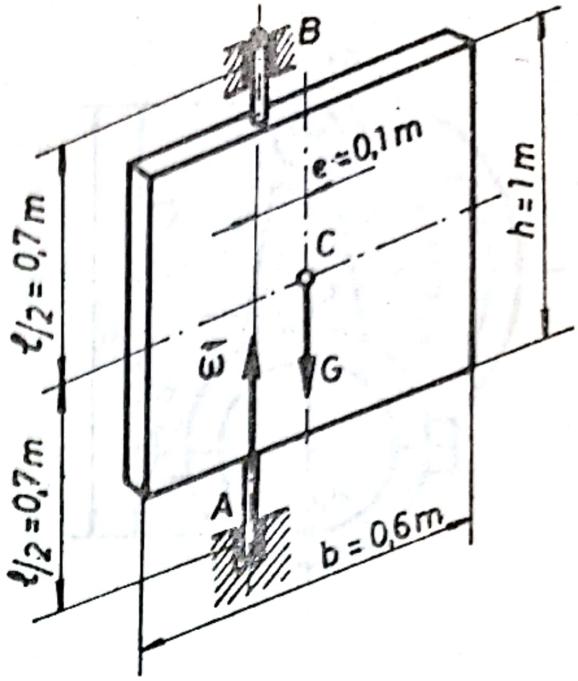


Fig. 2.13

2.14*. Bara dreaptă şi omogenă, avînd lungimea l=1 m, şi greutatea G=90 N (fig. 2.14) este fixată de axul orizontal AB în aşa fel încît formează cu acesta unghiul α=40°. Axul se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω=20 rad/s. Distanţa dintre lagăre este d=1,2 m.

Să se determine:

1) Energia cinetică a barei.

2) Reacţiunile din lagărele A şi B, cînd bara se află în planul vertical (fig. 2.14).

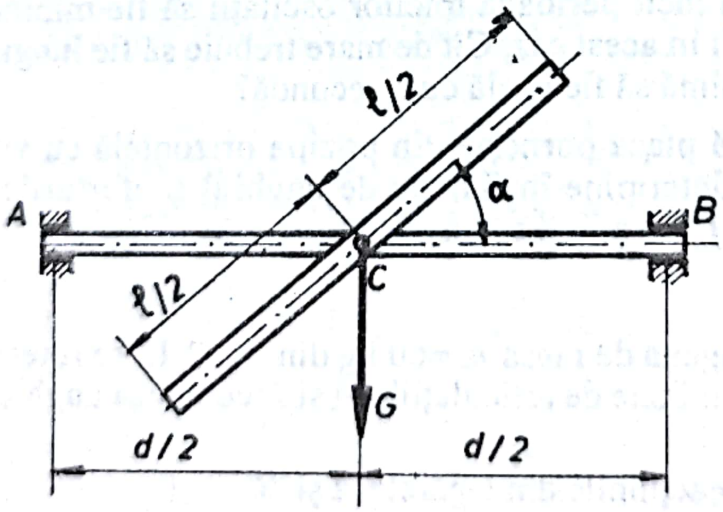


Fig. 2.14

2.15. Rotorul unui motor electric de masă M=70 kg este montat pe arbore în aşa fel încît centrul lui de greutate C se află pe axa de rotaţie, însă axa principală de inerţie Cz a rotorului formează cu aceasta unghiul α=5° (fig. 2.15). Se cunosc momentele de inerţie principale centrale ale rotorului J_x=J_y=0,6 kgm^2, J_z =0,35 kgm^2 şi distanţa dintre lagărele A şi B, l=50 cm. Să se determine reacţiunile din lagăre cînd rotorul se află în poziţia din fig. 2.15, dacă el se roteşte cu turaţia n=3 000 rot/minut.

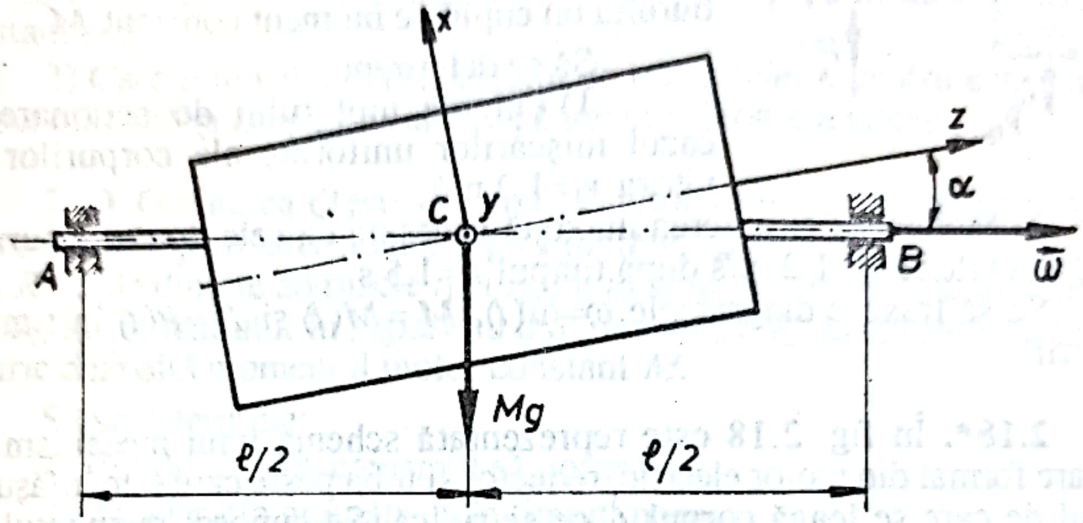


Fig. 2.15

2.16. Discul omogen de rază R =0,15 m şi de masă M=6 kg este articulat în O (articulaţie cilindrică). În jurul discului este înfăşurat un fir flexibil şi inextensibil la capătul căruia este atîrnat un corp de masa m=2 kg. Firul AB (OA =d=0,12 m; α=30°) menţine sistemul în echilibru.

1) Să se determine tensiunea din firul AB şi reacţiunea din articulaţia O.

La un moment dat firul AB se taie şi sistemul se pune în mişcare. Să se determine:

2) Acceleraţia corpului de masă m.

3) Timpul în care viteza acestui corp devine 1,5 m/s şi spaţiul parcurs în acest interval de timp.

4) Tensiunea din firul ce susţine masa m.

Toate frecările se consideră neglijabile.

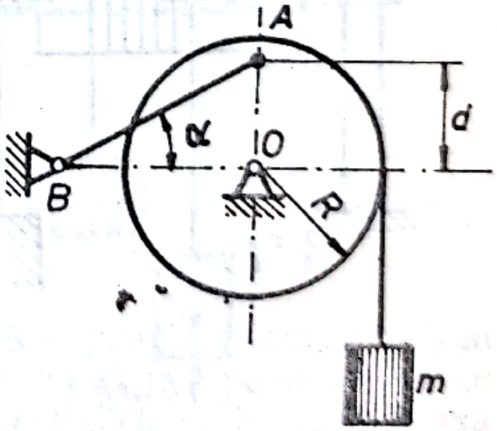


Fig. 2.16

Scanned with OKEN Scanner

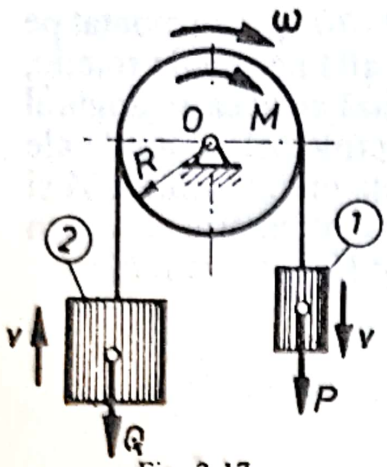


Fig. 2.17

2.17. Tamburul de rază $R=0{,}2$ m din fig. 2.17 se poate roti în jurul articulaţiei O. Momentul de inerţie al tamburului în raport cu axa lui de rotaţie este $J_z=0{,}85$ kgm^2. Peste tambur este înfăşurat un cablu, având fixate la capete corpurile 1 şi 2 de greutate $P=1\,500$ N, respectiv $Q=6\,500$ N. Sistemul este pus în mişcare de un motor care dezvoltă asupra tamburului un cuplu de moment constant M.

Să se determine:

1) Puterea motorului de acţionare în cazul mişcărilor uniforme ale corpurilor cu viteza $v_1=1{,}2$ m/s.

2) Momentul şi puterea maximă necesare ca cele două corpuri să ajungă la viteza $v_1=1{,}2$ m/s după timpul $t_1=1{,}5$ s.

Să se traseze diagramele $\omega=\omega(t)$, $M=M(t)$ şi $P=P(t)$ în timpul pornirii.

2.18*. În fig. 2.18 este reprezentată schema unui mecanism de ridicare format din motor electric, reductor şi toba peste care este înfăşurat cablul de care se leagă corpul C ce se ridică. Se cunosc: momentul de inerţie J_1 al părţilor din mecanism care se rotesc cu viteza unghiulară ω_1 (rotorul motorului, axul motor 1, cuplajul C_1, o parte din reductor), momentul de inerţie J_2 al părţilor care se rotesc cu viteza unghiulară ω_2

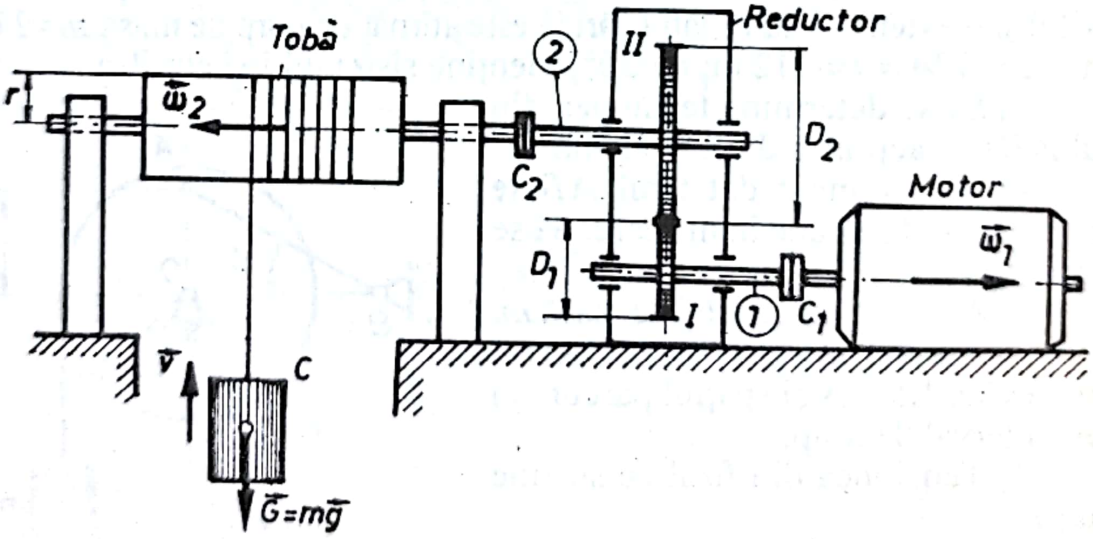


Fig. 2.18

Scanned with OKEN Scanner

(toba, axul 2, cuplajul C_2 şi o parte din reductor), raportul de transmisie $\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, raza tobei r şi greutatea $G=mg$ a corpului C care se ridică. Momentul M dezvoltat de motor este funcţie de viteza unghiulară ω_1 conform relaţiei $M=M_0(1-k\omega_1)$. Se mai cunoaşte randamentul η al mecanismului, care se consideră constant (independent de regimul de funcţionare).

1) Ştiind că pentru $t=0$, $v=0$, să se determine viteza corpului C în funcţie de timp şi să se arate că ea tinde asimptotic către o valoare constantă v_c.

2) Care este valoarea raportului de transmisie λ pentru care viteza v_c este maximă şi care este valoarea corespunzătoare a vitezei v_c?

2.19. Greutatea Q este ridicată cu ajutorul unui troliu acţionat de un motor electric, prin intermediul roţilor dinţate I şi II. Cilindrul troliului are raza R, roţile dinţate au razele r_1 şi r_2; momentul de inerţie al axului motor este J_1, iar al troliului în raport cu axa de rotaţie J_2. La pornire motorul electric dezvoltă momentul motor constant M.

Să se determine:

1) Condiţia ca mecanismul să pornească.

2) Acceleraţia greutăţii Q în timpul pornirii.

3) Tensiunea din fir.

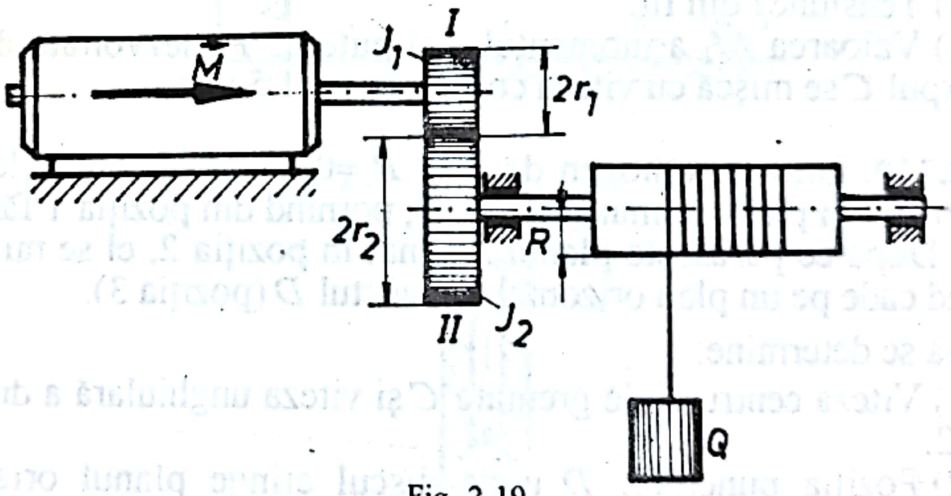


Fig. 2.19

2.20. Un corp C de greutate $G=500$ N se poate deplasa pe un plan înclinat ($\alpha=30°$), fiind legat de un fir care este înfăşurat pe un tambur de rază $R=0{,}15$ m, avînd momentul de inerţie $J=0{,}65$ kgm^2 în raport cu axa de rotaţie. Asupra tamburului acţionează un motor, care dezvoltă un cuplu

Scanned with OKEN Scanner

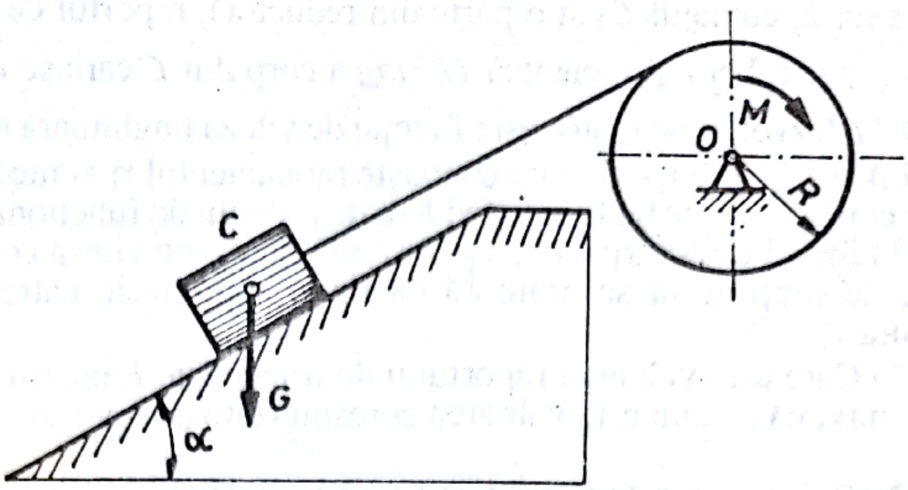


Fig. 2.20

de forţe, avînd momentul constant M. Coeficientul de frecare dintre corp şi planul înclinat este $\mu=0,1$.

Ştiind că sistemul pleacă din repaus, să se determine:

1) Acceleraţia corpului C, dacă $M=50$ Nm.

2) Timpul după care viteza corpului devine $v_1=1,5$ m/s şi spaţiul parcurs în acest timp.

3) Tensiunea din fir.

4) Valoarea M_1 a momentului şi puterea P_1 dezvoltată de motor dacă corpul C se mişcă cu viteza constantă $v_1=1,5$ m/s.

2.21*. Un disc omogen de rază $R=0,15$ m se rostogoleşte fără alunecare pe un plan înclinat (fig. 2.21), pornind din poziţia 1 fără viteză iniţială. După ce părăseşte planul înclinat în poziţia 2, el se mişcă liber pînă cînd cade pe un plan orizontal în punctul D (poziţia 3).

Să se determine:

1) Viteza centrului de greutate C şi viteza unghiulară a discului în poziţia 2.

2) Poziţia punctului D unde discul atinge planul orizontal şi numărul rotaţiilor efectuate în mişcarea liberă.

Se va neglija frecarea cu aerul.

2.22*. Centrul de greutate C al barei drepte omogene AB, de lungime $2l$ şi de masă M, se poate mişca într-un ghidaj orizontal, iar capătul ei A într-un ghidaj vertical (fig. 2.22). În momentul iniţial,

Scanned with OKEN Scanner

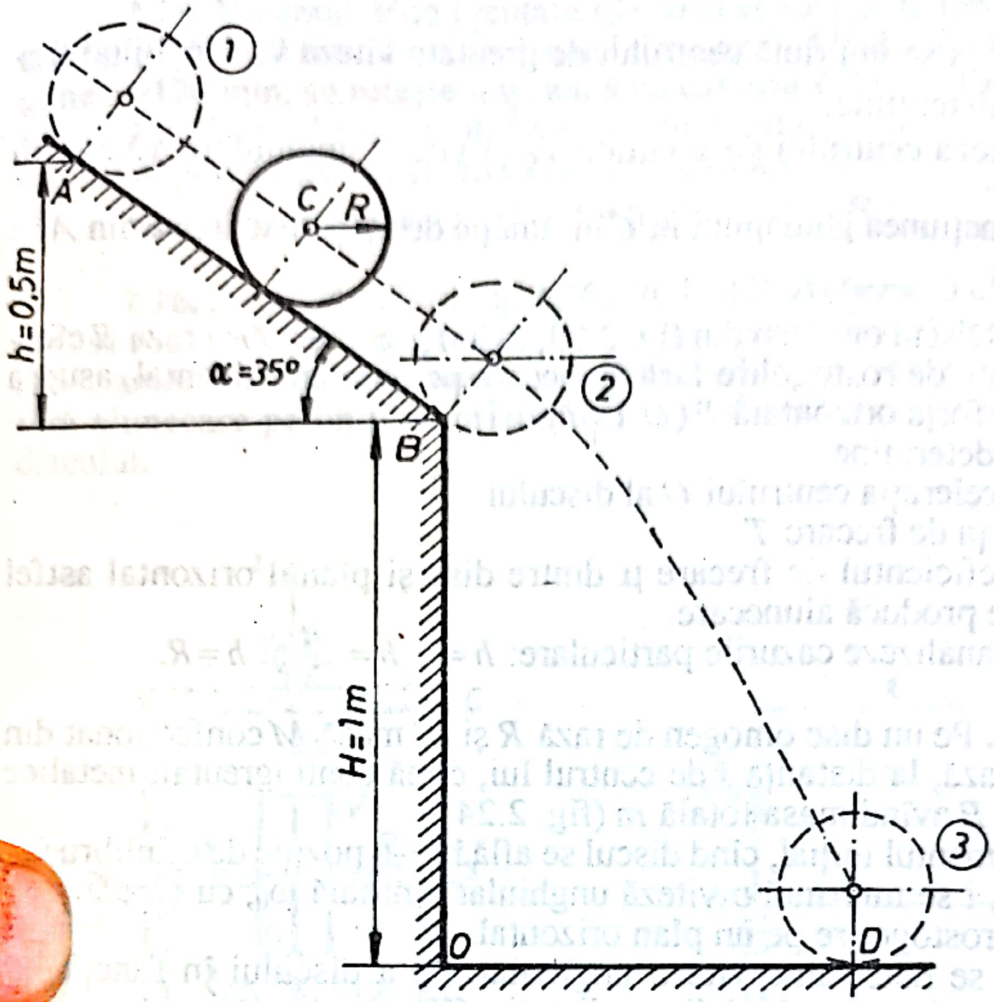


Fig. 2.21

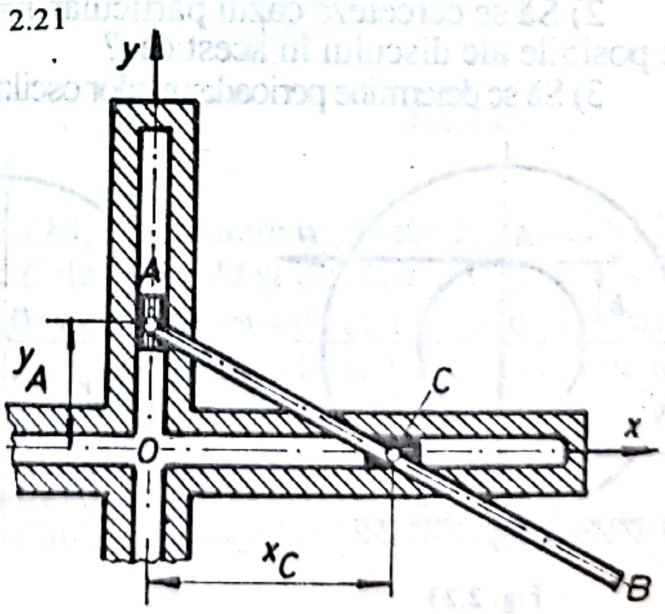


Fig. 2.22

Scanned with OKEN Scanner

cînd $x_C = \frac{l}{2}$, i se imprimă centrului de greutate viteza v_0. Neglijînd frecările, să se determine:

1) Viteza centrului de greutate v_C şi viteza unghiulară a barei în funcţie de x_C.

2) Reacţiunea ghidajului în C în funcţie de x_C şi reacţiunea din A în funcţie de y_A.

2.23. Discul omogen din fig. 2.23, avînd greutatea G şi raza R efectuează mişcare de rostogolire fără alunecare pe un plan orizontal, asupra lui acţionînd forţa orizontală P ($OA = h$).

Să se determine:

1) Acceleraţia centrului O al discului.

2) Forţa de frecare T.

3) Coeficientul de frecare μ dintre disc şi planul orizontal astfel încît să nu se producă alunecare.

Să se analizeze cazurile particulare: $h = 0$, $h = \frac{R}{2}$ şi $h = R$.

2.24*. Pe un disc omogen de rază R şi de masă M confecţionat din lemn se fixează, la distanţa r de centrul lui, două contragreutăţi metalice punctiforme B avînd masa totală m (fig. 2.24).

În momentul iniţial, cînd discul se află într-o poziţie de echilibru (ca în fig. 2.24), i se imprimă o viteză unghiulară iniţială ω_0, cu care începe mişcarea de rostogolire pe un plan orizontal.

1) Să se determine viteza unghiulară ω a discului în funcţie de unghiul de rotaţie φ (unghiul dintre direcţia OB şi verticală).

2) Să se cerceteze cazul particular $r = \frac{R}{2}$ şi $m = M$. Care sînt mişcările posibile ale discului în acest caz?

3) Să se determine perioada micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru.

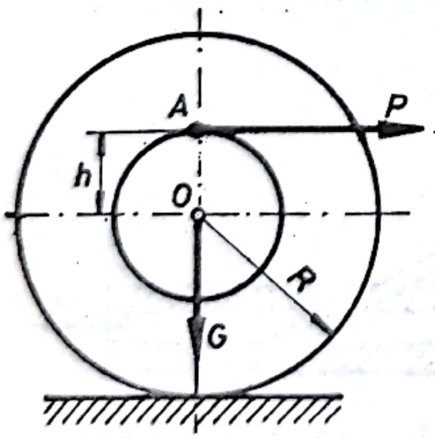


Fig. 2.23

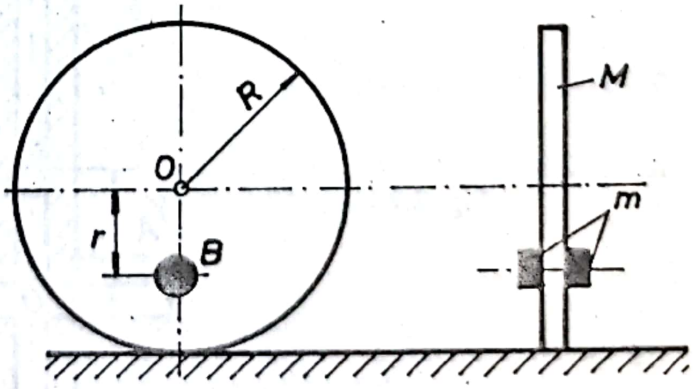


Fig. 2.24

Scanned with OKEN Scanner

2.25. Volantul V de greutate $G=50$ N se roteşte în jurul axei Oz cu turaţia $n=20\,000$ rot/minut. În acelaşi timp axul AB al volantului, de lungime $l=120$ mm, se roteşte împreună cu carcasa C în jurul axei verticale Oz_1 cu turaţia $n_1=4$ rot/minut. Se cunoaşte momentul de inerţie al volantului în raport cu axa de rotaţie Oz: $J_z=0{,}013$ kgm^2.

Să se determine reacţiunile din lagărele A şi B.

2.26. Braţul ABC din fig. 2.26 ($BC\perp AB$, $AB=r=30$ cm, $BC=l=60$ cm) se roteşte în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă $\omega_0=4$ rad/s, antrenînd discul de rază r, avînd masa $M=5$ kg, care se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal. Să se determine energia cinetică a discului.

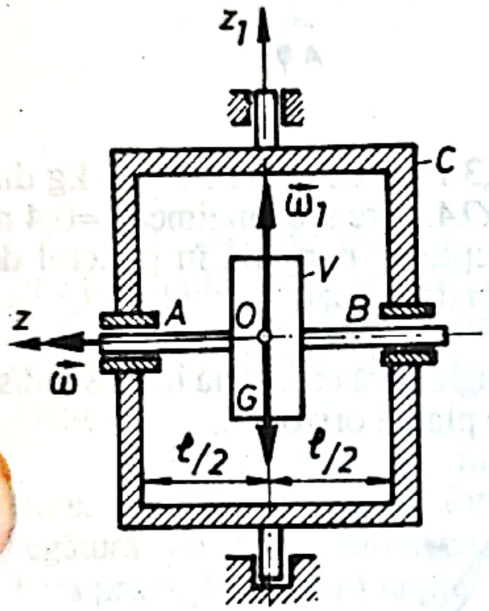


Fig. 2.25

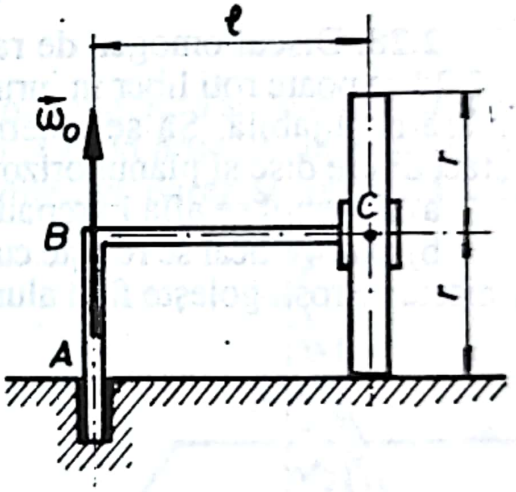


Fig. 2.26

2.27*. Pe bara dreaptă OA, de greutate neglijabilă, articulată în O, este montat un corp cilindric C de masă M şi de rază R (fig. 2.27). Bara împreună cu cilindrul se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_1$, în timp ce oscilează în jurul unei axe orizontale ce trece prin punctul O, fiind ghidată să rămînă într-un plan vertical (aşa cum se arată în fig. 2.27).

1) Să se stabilească cum depinde perioada micilor oscilaţii de viteza unghiulară ω_1?

2) Să se determine reacţiunea ghidajului în funcţie de unghiul ψ, dacă la $t=0$, $\psi=\psi_0$ şi $\dot{\psi}=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Distanţa dintre centrul de greutate al cilindrului şi punctul O este d, iar dintre ghidajul orizontal şi acelaşi punct h. Forţele de frecare se consideră neglijabile.

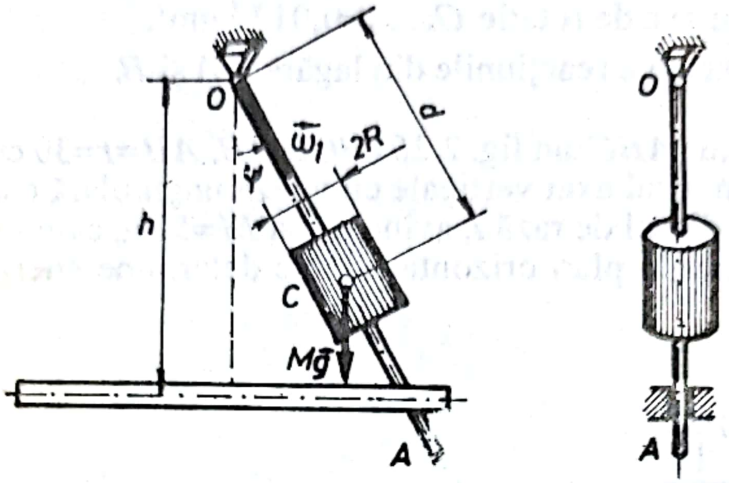


Fig. 2.27

2.28. Discul omogen de rază $R=0{,}3$ m şi de masă $M=10$ kg din fig. 2.28 se poate roti liber în jurul axului OA, care are lungimea $l=0{,}4$ m şi masă neglijabilă. Să se determine reacţiunea normală în punctul de contact dintre disc şi planul orizontal (B) în două cazuri:

a) sistemul se află în repaus;

b) axul vertical se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\omega_0=18$ rad/s, iar discul se rostogoleşte fără alunecare pe planul orizontal.

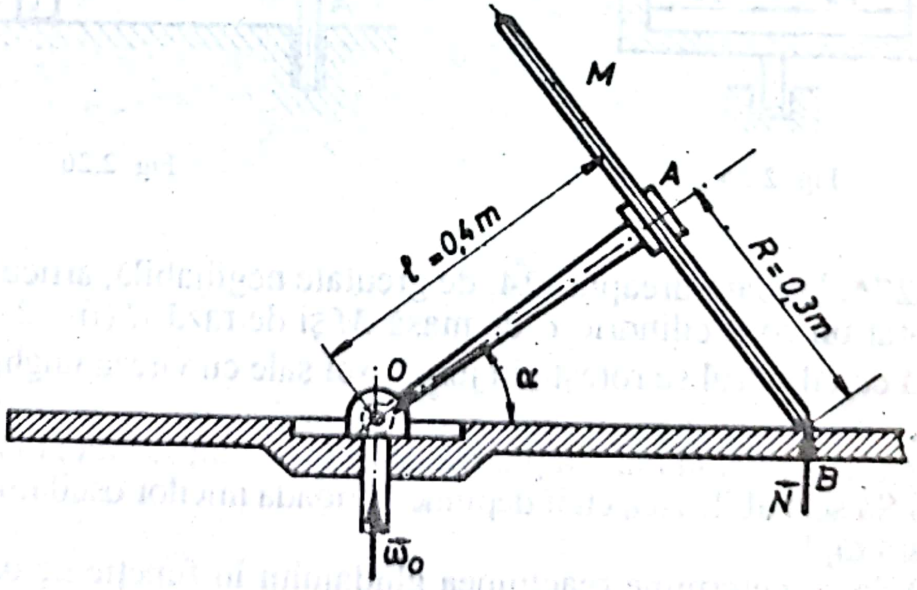


Fig. 2.28

Scanned with OKEN Scanner

3. MECANICĂ ANALITICĂ

3.1. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

3.1. Bara dreaptă omogenă AB de lungime l şi de masă M se sprijină pe un plan orizontal fix, capătul ei A fiind articulat într-un punct fix (articulaţie sferică). Unghiul dintre direcţia barei şi verticală este α (fig. 3.1). Toate frecările sînt neglijabile.

1) Să se studieze mişcarea barei şi să se determine forţele de legătură, ştiind că în momentul iniţial bara primeşte o viteză unghiulară ω_0 în jurul axei verticale fixe Δ, ce trece prin punctul A.

2) Care este condiţia ca reacţiunea planului orizontal să fie nulă?

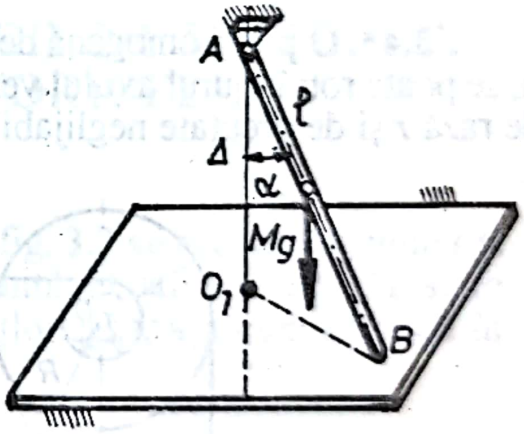


Fig. 3.1

3.2. Bara dreaptă omogenă DE de lungime L şi de masă M este fixată de un arbore vertical (fig. 3.2) care se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine reacţiunile din lagărele A şi B. În cazul $c=0$ să se studieze variaţia acestor reacţiuni dacă unghiul α variază între 0 şi 90°.

Scanned with OKEN Scanner

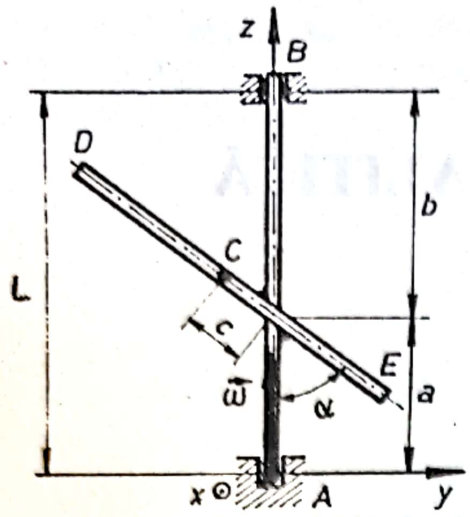


Fig. 3.2

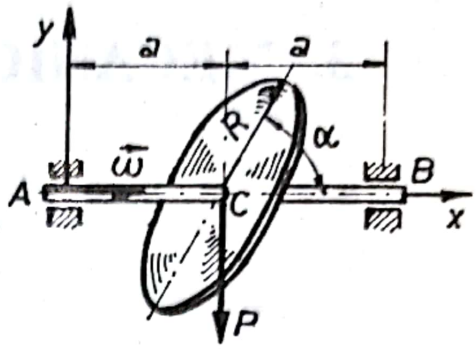


Fig. 3.3

3.3 Pe un arbore orizontal de lungime $2a$ este montat un disc omogen de rază R şi de greutate P, aşa cum se arată în fig. 3.3. Centrul de greutate C al discului se află pe axa arborelui, însă planul discului nu este perpendicular pe această axă $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$. Să se determine reacţiunile din lagărele A şi B dacă arborele se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω.

3.4*. O placă omogenă de greutate P, avînd lăţimea $2b$ şi înălţimea h, se poate roti în jurul axului vertical AB, pe care se mai găseşte şaiba C de rază r şi de greutate neglijabilă. Pe această şaibă este înfăşurat un fir,

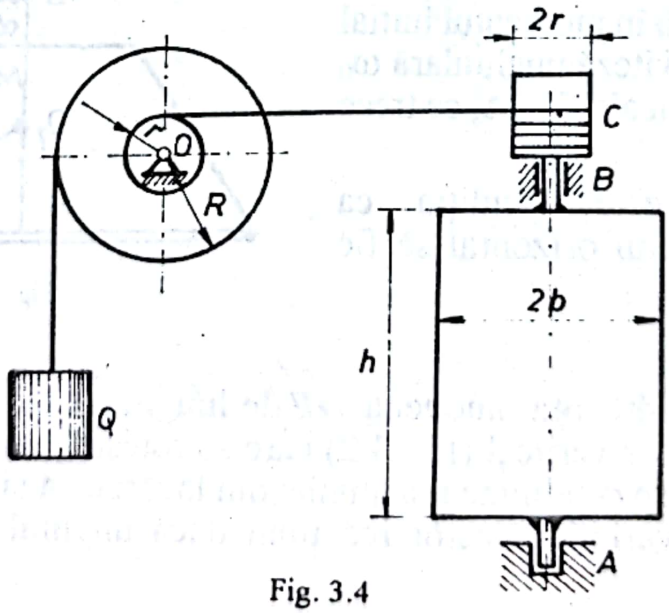


Fig. 3.4

Scanned with OKEN Scanner

trecut peste scripetele de rază r al unui troliu, care are momentul de inerţie J în raport cu axa de rotaţie. Sistemul este pus în mişcare de greutatea Q, atîrnată la capătul firului ce trece peste scripetele de rază R al troliului. În timpul mişcării fiecare element al plăcii întîmpină rezistenţa aerului, care este proporţională cu aria şi viteza elementului, factorul de proporţionalitate fiind k.

1) Să se determine legea mişcării şi legea de variaţie a vitezei unghiulare a plăcii.

2) Să se determine tensiunile în fire.

3) Presupunînd că la un moment t_1 se desprinde greutatea Q, să se determine timpul t_2 după care viteza unghiulară a plăcii se reduce la jumătate.

3.5. Să se rezolve problema 2.19, folosind principiul lui d'Alembert.

3.6. Să se rezolve punctele 1) şi 3) ale problemei 2.20 cu ajutorul principiului lui d'Alembert.

3.2 PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE. PRINCIPIUL LUI TORICELLI

3.7*. Barele articulate AB şi BC din fig. 3.7 au aceeaşi lungime l şi greutăţi neglijabile, iar arcul de constantă elastică k are în stare nedeformată lungimea h. În punctul B acţionează, aşa cum se arată în figură, o forţă de mărime P.

Să se determine:

1) valoarea unghiului θ în poziţia de echilibru a sistemului;

2) forţa elastică din arc în cazul echilibrului.

3.8. Asupra sistemului de bare articulate din fig. 3.8 acţionează în punctele B şi E, aşa cum se arată în figură, două forţe, avînd mărimile Q şi P. Greutăţile barelor sînt neglijabile, iar lungimile lor sînt:

$$AC=OD=2\,a, \qquad CE=DE=a.$$

Scanned with OKEN Scanner

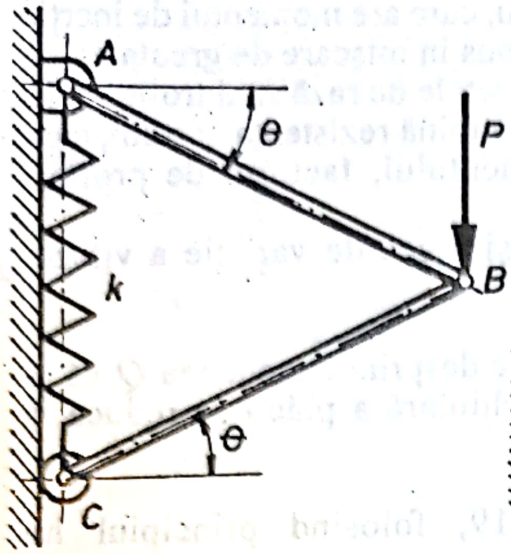


Fig. 3.7

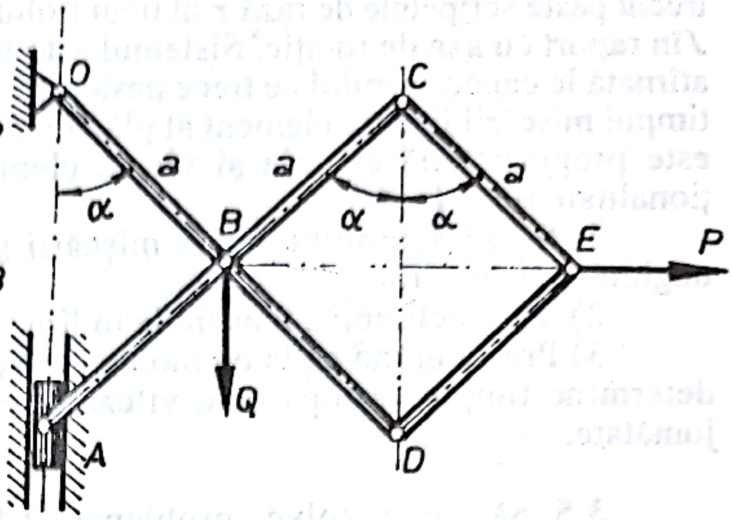


Fig. 3.8

Să se determine:

1) poziţia de echilibru a sistemului;

2) relaţia de legătură dintre P şi Q pentru ca în poziţia de echilibru unghiul α să fie de 45°.

3.9. În fig. 3.9. este reprezentată schema unei platforme de lucru cu acţionare hidraulică. Pe platforma 1, de greutate neglijabilă, ce se sprijină pe rolele B şi C, se află un corp de greutate G, al cărui centru de greutate

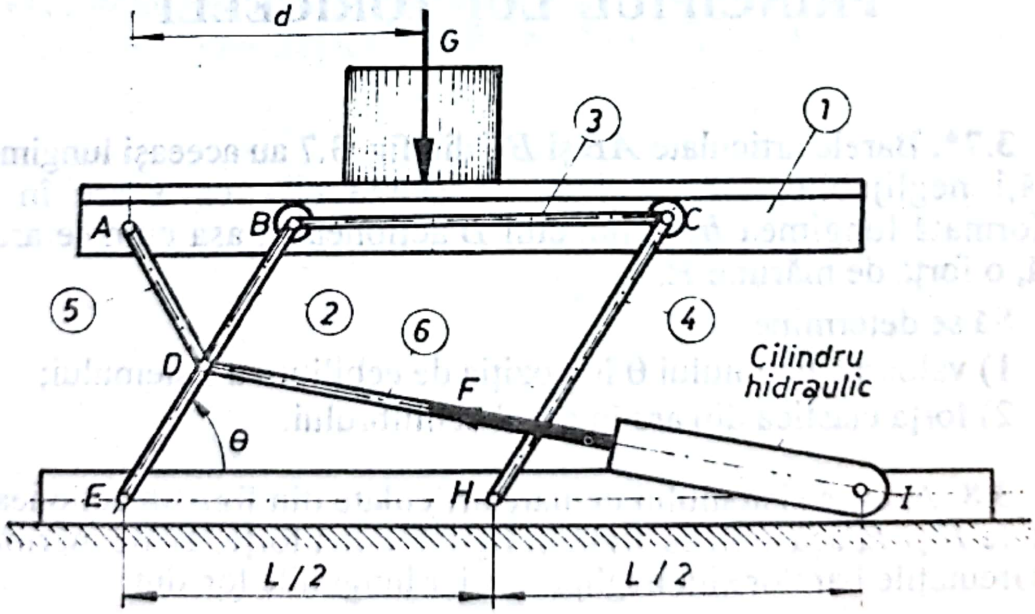


Fig. 3.9

Scanned with OKEN Scanner

este situat la distanţa d de punctul A. Barele 2, 3, 4, 5 şi 6 au de asemenea greutăţi neglijabile. Se cunosc următoarele dimensiuni:

$$EB=HC=2a,\ BC=EH=\frac{L}{2},\ AD=\frac{EB}{2}.$$

1) Să se determine în funcţie de unghiul θ forţa F dezvoltată de cilindrul hidraulic pentru a menţine platforma în echilibru, arătînd că aceasta nu depinde de poziţia greutăţii pe platformă (distanţa d).

2) Să se calculeze valorile forţei F pentru diferite valori ale unghiului θ cuprinse între 0 şi 90° (din 10 în 10 grade) dacă $a=0{,}7$ m şi $L=3{,}2$ m. Care este valoarea unghiului θ pentru care $F=G$?

3.10*. Asupra grinzii cu zăbrele din fig. 3.10, articulată în A şi simplu rezemată în B, acţionează în punctele C şi D două forţe, avînd mărimile P şi $2P$.

Să se determine:

1) forţele de legătură din A şi B;

2) eforturile din barele 1, 2 şi 3.

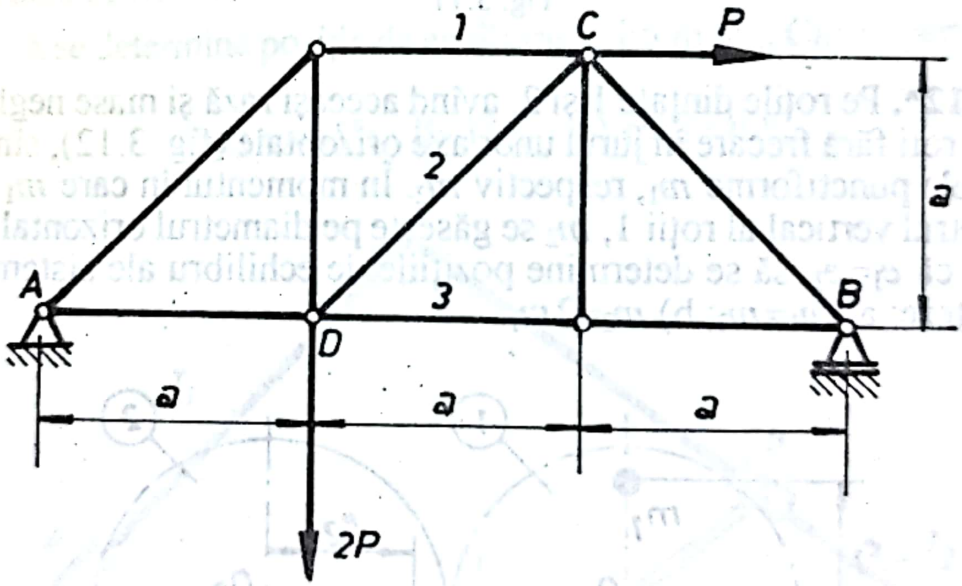


Fig. 3.10

3.11. Asupra grinzii cu zăbrele din fig. 3.11 acţionează în punctele B, C şi D trei forţe, avînd mărimile P, $2P$ şi $3P$.

Să se determine:

1) reacţiunea din articulaţia 0 şi efortul din cablul AE;

2) eforturile din barele 1, 2 şi 3.

Scanned with OKEN Scanner

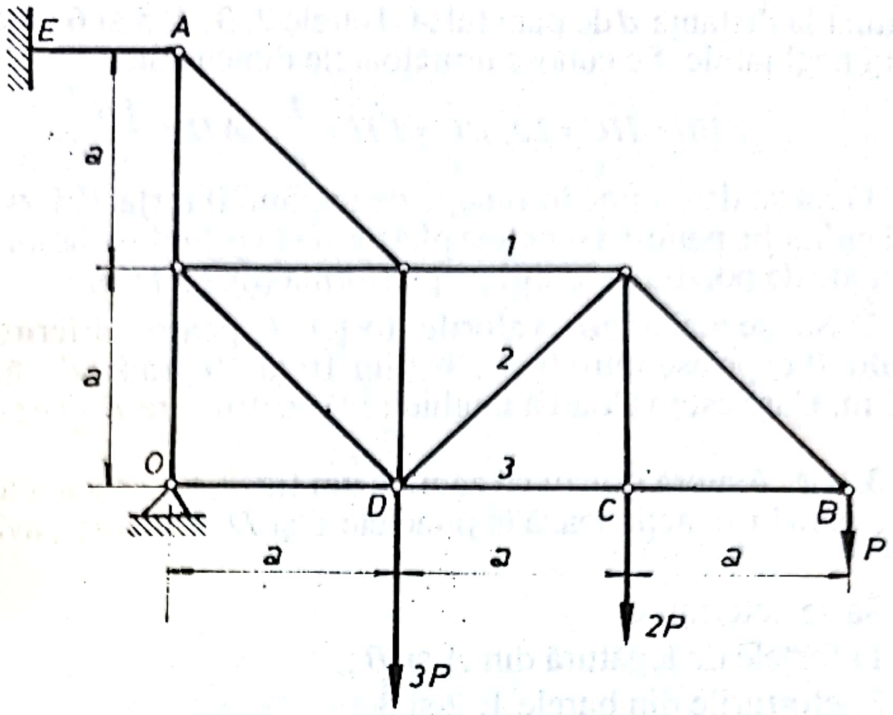


Fig. 3.11

3.12*. Pe roţile dinţate 1 şi 2, avînd aceeaşi rază şi mase neglijabile, ce se pot roti fără frecare în jurul unor axe orizontale (fig. 3.12), sînt montate masele punctiforme m_1, respectiv m_2. În momentul în care m_1 se află pe diametrul vertical al roţii 1, m_2 se găseşte pe diametrul orizontal al roţii 2. Ştiind că $e_1=e_2$, să se determine poziţiile de echilibru ale sistemului în două ipoteze: a) $m_1=m_2$; b) $m_2=2m_1$.

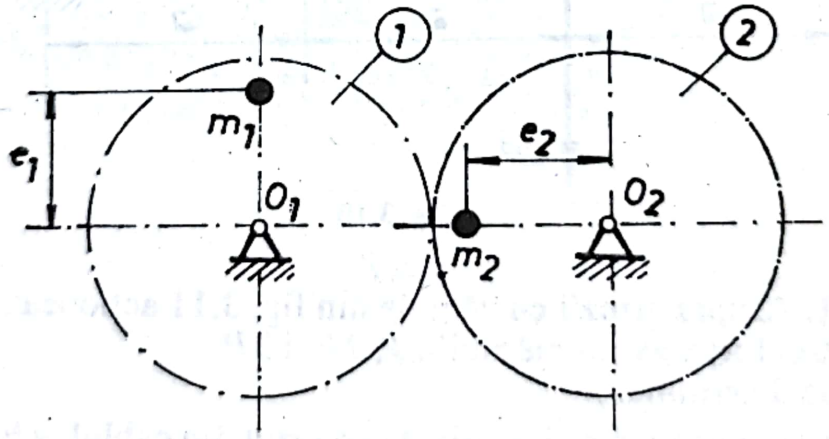


Fig. 3.12

Scanned with OKEN Scanner

3.13. Bara dreaptă omogenă OA de lungime $2a$ şi de greutate P este articulată în O (articulaţie plană). Pe bară poate aluneca un culisor de greutate $Q=\frac{P}{2}$, care este legat de firul BD. Se dă $BD=OD=a$ (fig. 3.13).

Neglijînd forţele de frecare, să se determine poziţia de echilibru a sistemului (valoarea unghiului θ).

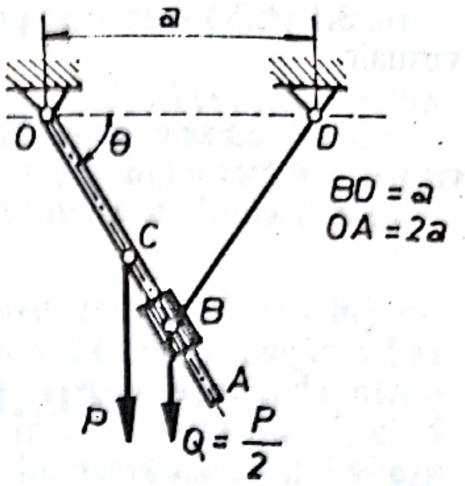


Fig. 3.13

3.14. Două bare drepte omogene AC şi BC, avînd fiecare lungimea $2l$ şi greutatea P, sînt legate între ele prin articulaţia C (fig. 3.14). Capătul A al barei AC se poate deplasa fără frecare pe tija fixă T_1, ce formează cu orizontala unghiul α, iar capătul B al barei BC pe tija fixă T_2, ce formează cu orizontala unghiul β. Tijele T_1 şi T_2 se află în acelaşi plan vertical şi sînt concurente în O.

Să se determine poziţia de echilibru a sistemului. Cazuri particulare:

a) $\alpha=45°$; $\beta=35°$; b) $\alpha=\beta=40°$.

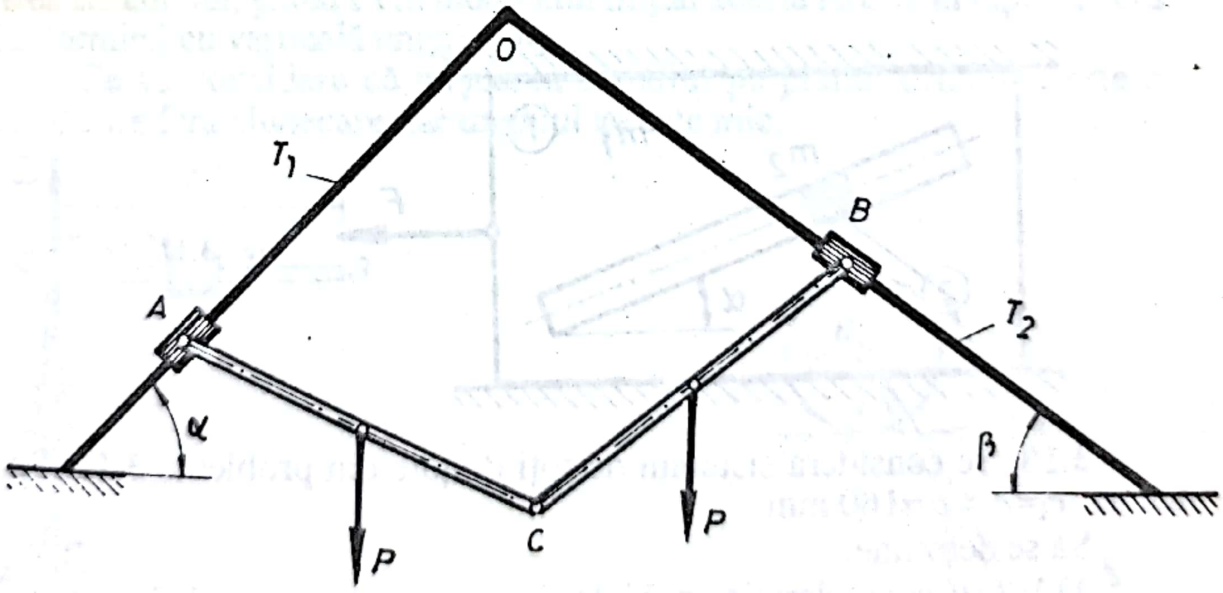


Fig. 3.14

3.15*. Să se rezolve probiema 2.16, aplicînd principiul deplasărilor virtuale.

3.16. Să se rezolve problema 2.19, folosind principiul deplasărilor virtuale.

3.3. ECUAŢIILE LUI LAGRANGE

3.17*. Corpul 1 de masă m_1=12 kg din fig. 3.17 se poate deplasa fără frecare în direcţie orizontală. În acest corp există un canal înclinat cu unghiul α=20° faţă de orizontală în care se poate deplasa tot fără frecare corpul punctiform 2 de masă m_2=1 kg. Asupra corpului 1 acţionează o forţă orizontală F.

1) Să se determine acceleraţia absolută a corpului 1 şi acceleraţia relativă a corpului 2, dacă F=30 N.

2) Pentru ce valoare a forţei F rămîne corpul 2 în repaus relativ. Cît de mare este în acest caz acceleraţia corpului 1?

3) Care este valoarea forţei F pentru care acceleraţia corpului 1 este nulă? Ce valoare are în acest caz acceleraţia relativă a lui m_2 ?

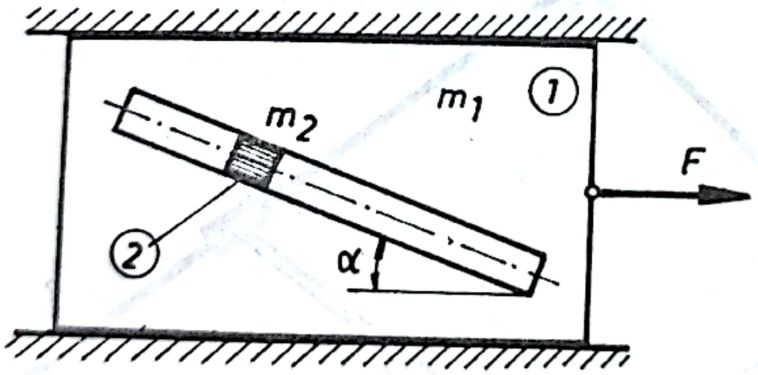


Fig. 3.17

3.18. Se consideră sistemul de roţi dinţate din problema 3.12. Se mai dă: $e_1=e_2=e=160$ mm.

Să se detrmine:

1) Viteza şi acceleraţia unghiulară cu care se rotesc roţile în funcţie de unghiul de rotaţie dacă sistemul porneşte din poziţia indicată în fig. 3.12 cu viteza unghiulară iniţială nulă. Care sînt valorile extreme ale vitezei şi

Scanned with OKEN Scanner

accelerației unghiulare și în ce poziție se oprește sistemul? Cazuri particulare: a) $m_2=m_1$; b) $m_2=2m_1$.

2) Cu ce viteză unghiulară inițială minimă trebuie să pornească roțile din poziția indicată în fig. 3.12 pentru ca să ajungă înapoi în această poziție?

3) Să se reprezinte grafic viteza și accelerația unghiulară în funcție de unghiul φ pentru $m_2=m_1$ și $m_2=2m_1$ dacă viteza unghiulară inițială este nulă.

3.19. Bara cotită AOB ($OBA \perp AO$) se poate roti fără frecare în jurul axei verticale AO (fig. 3.19). Pe porțiunea orizontală OB, de lungime l, se poate deplasa tot fără frecare culisorul C de masă m. Momentul de inerție al barei cotite față de axa de rotație este J. În momentul inițial, cînd culisorul se află la distanța x_0 de punctul O, se imprimă sistemului viteza unghiulară ω_0.

1) Să se deducă ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului.

2) Să se determine viteza unghiulară ω a barei cotite și viteza relativă v_r a culisorului pe bara OB în funcție de distanța $OC=x$.

3) Care este viteza absolută a culisorului în momentul în care părăsește bara?

4) Cum se vor mișca două corpuri ale sistemului după ce culisorul părăsește bara?

3.20*. Discul omogen de rază R și de greutate P din fig. 3.20 se sprijină pe un plan orizontal. De disc este legată prin articulația B bara dreaptă omogenă BD de lungime l și de greutate G. Să se studieze mișcarea sistemului, știind că în momentul inițial acesta se află în repaus, bara BD formînd cu verticală unghiul φ_0.

Se va considera că mișcarea discului pe planul orizontal este o rostogolire fără alunecare, iar unghiul φ_0 este mic.

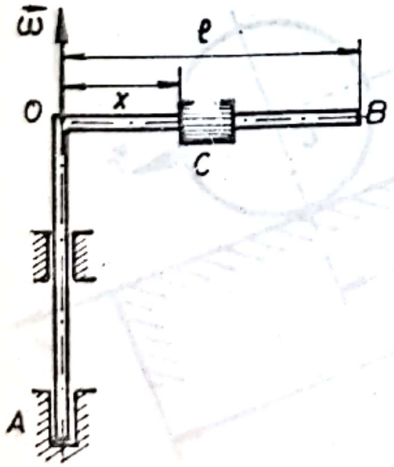


Fig. 3.19

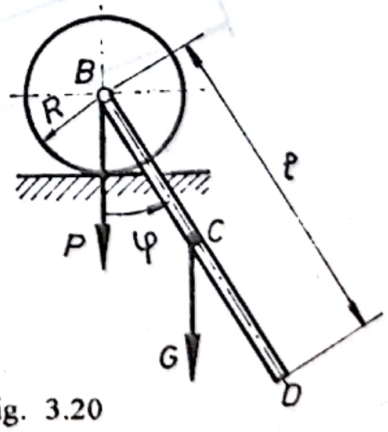


Fig. 3.20

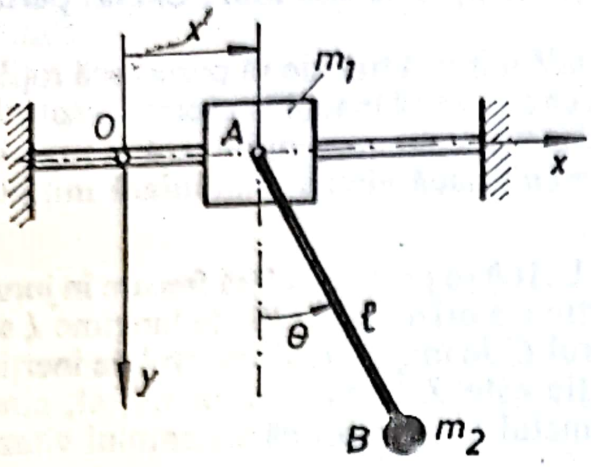


Fig. 3.21

3.21. Un corp de masă m_1 poate aluneca fără frecare de-a lungul unei bare drepte orizontale. De aceasta este legată, printr-o articulaţie (fig. 3.21), bara AB de lungime l şi de masă neglijabilă, ce poate oscila în planul vertical. La capătul B al barei se află o bilă de masă m_2, avînd dimensiuni mici faţă de lungimea l. Să se studieze mişcarea acestui sistem, care reprezintă un pendul eliptic, ştiind că în momentul iniţial sistemul se află în repaus, bara formînd cu verticala unghiul θ_0 ($\theta_0 < 6°$).

3.22*. O suprafaţă plană aspră se poate roti în jurul unei axe orizontale ce trece prin punctul O (fig. 3.22). La început suprafaţa se află în repaus în poziţie orizontală, iar pe ea, în dreptul punctului O, se află tot în repaus într-un plan vertical un disc omogen de masă M=3 kg şi de rază

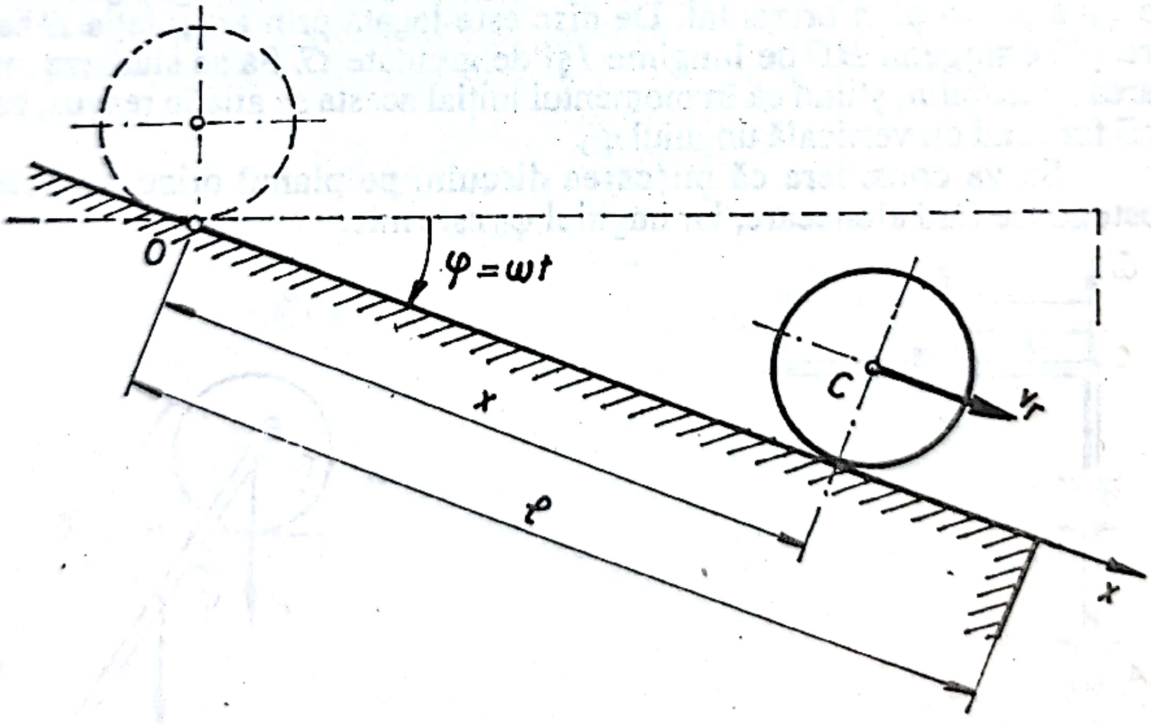


Fig. 3.22

Scanned with OKEN Scanner

R=48 mm. La un moment dat suprafaţa începe să se rotească cu viteza unghiulară constantă ω=0,12 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, iar discul să coboare pe ea. Se presupune că frecarea de aderenţă asigură pe toată lungimea suprafeţei (l =10 m) rostogolirea fără alunecare, iar frecarea de rostogolire este neglijabilă.

Să se determine:

1) legea mişcării centrului de greutate C al discului faţă de suprafaţă, precum şi legea de variaţie a vitezei relative a acestuia;

2) timpul după care discul părăseşte suprafaţa;

3) viteza absolută a centrului de greutate şi viteza unghiulară de rotaţie absolută a discului în momentul părăsirii suprafeţei;

4) valoarea minimă necesară a coeficientului de frecare dintre disc şi suprafaţă pentru ca să nu se producă alunecarea discului pe suprafaţă.

3.23. Să se determine acceleraţia greutăţii Q din problema 2.19, folosind metoda ecuaţiilor lui Lagrange.

Scanned with OKEN Scanner

4. CIOCNIRI

4.1. Bila de masă m_1=1 kg este legată de un fir de lungime l_1=1 m (fig. 4.1). În momentul inițial firul formează cu verticala unghiul α=60°. Din această poziție pornește bila și cînd firul devine vertical se ciocnește elastic cu o altă bilă de masă m_2=2 kg, care este suspendată printr-un fir de lungime l_2=0,6 m.

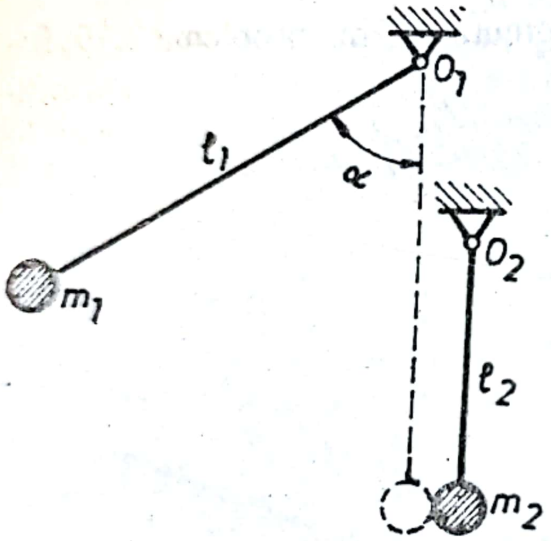


Fig. 4.1

Să se determine:

1) viteza bilei de masă m_1 înainte de ciocnire;

2) vitezele bilelor după ciocnire;

3) unghiurile α_1 și β_1 cu care deviază cele două fire față de verticală după ciocnire.

4) Ce valoare trebuie să aibă lungimea l_2 pentru ca:

a) deviația firului de lungime l_2 să fie egală cu α.

b) cele două fire să devieze cu același unghi?

4.2. Două bile mici, de mase m_1, respectiv $m_2 = 2m_1$, sînt suspendate cu ajutorul unor fire de aceeași lungime l, astfel încît bilele se ating (fig. 4.2). Bila de masă m_1 se ridică într-o poziție în care firul formează cu verticala unghiul α=60° și apoi i se dă drumul fără viteză inițială.

Să se determine unghiurile α_1 și β_1 de deviere maximă ale celor două fire în urma ciocnirii dintre bile în următoarele ipoteze:

a) ciocnirea este plastică (k=0);

b) k=0,5;

c) ciocnirea este elastică (k=1).

Scanned with OKEN Scanner

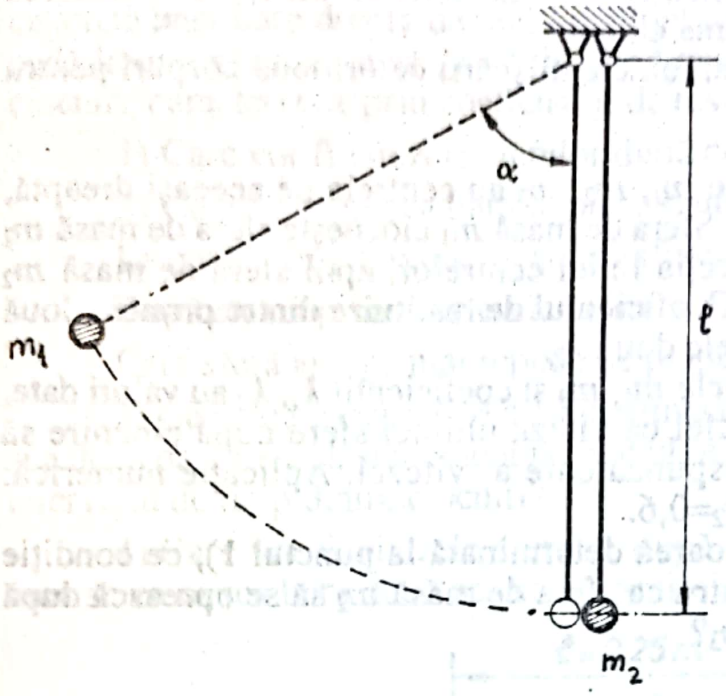


Fig. 4.2

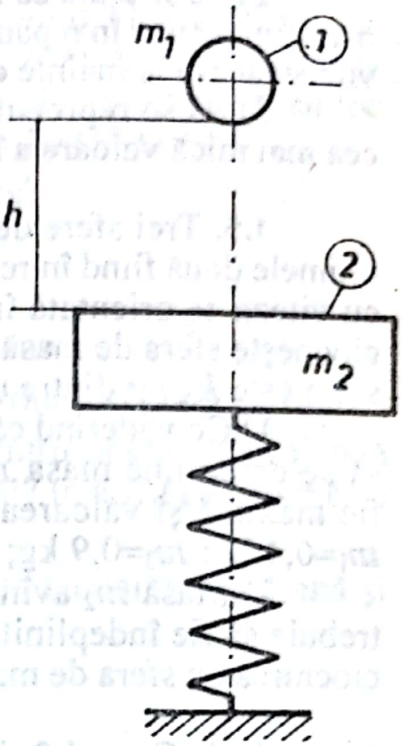


Fig. 4.3

4.3. Deformaţia statică a arcului din fig. 4.3 sub acţiunea greutăţii corpului 2 de masă m_2=3 kg este f_{st}=8,6 mm. Bila 1 de masă m_1=0,6 kg cade de la înălţimea h =0,6 m şi se ciocneşte centric cu corpul 2. Coeficientul de restituire are valoarea k=0,8. Frecarea cu aerul se consideră neglijabilă.

Să se determine:

1) vitezele celor două corpuri după ciocnire;

2) înălţimea h la care se ridică bila după ciocnire;

3) deformaţia maximă a arcului;

4) înălţimea h_1 la care se află bila în momentul în care corpul 2 ajunge prima dată înapoi în poziţia iniţială;

5) după cît timp şi în ce poziţie se întîlnesc a doua oară cele două corpuri.

4.4*. Bila de masă m_1=0,4 kg cade de la înălţimea h pe un corp de masă m_2 =4 kg, care stă în repaus, aşezat pe un arc cu constanta elastică k =340 N/m (fig. 4.3). Ciocnirea dintre cele două corpuri este perfect elastică.

1) Să se determine înălţimea h în aşa fel încît ciocnirea a două dintre corpuri să se producă în aceeaşi poziţie.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se arate că în acest caz, după cea de a doua ciocnire, corpul de masă m_2 rămîne în repaus, iar mărimea vitezei bilei devine egală cu valoarea vitezei acesteia înainte de prima ciocnire.

3) Să se reprezinte diagramele mişcării celor două corpuri pentru cea mai mică valoare a lui h.

4.5. Trei sfere de mase m_1, m_2, m_3 au centrele pe aceeaşi dreaptă, ultimele două fiind în repaus. Sfera de masă m_1 ciocneşte sfera de masă m_2 cu viteza v_1 orientată în direcţia liniei centrelor, apoi sfera de masă m_2 ciocneşte sfera de masă m_3. Coeficientul de restituire dintre primele două sfere este k_1, iar dintre ultimele două k_2.

1) Considerînd că masele m_1, m_3 şi coeficienţii k_1, k_2 au valori date, să se determine masa m_2 astfel ca viteza ultimei sfere după ciocnire să fie maximă şi valoarea corespunzătoare a vitezei. Aplicaţie numerică: m_1=0,4 kg; m_3=0,9 kg; k_1=k_2=0,6.

2) Masa m_2 avînd valoarea determinată la punctul 1), ce condiţie trebuie să fie îndeplinită pentru ca sfera de masă m_2 să se oprească după ciocnirea cu sfera de masă m_3?

4.6*. Corpul 2 de masă m_2 se află în repaus pe un plan orizontal neted, la distanţa d=0,24 m de un limitator fix (fig. 4.6). Corpul 1 de masă $m_1=\lambda m_2$ ($\lambda \geq 1$) se mişcă spre primul cu viteza $v_1=5\ \frac{m}{s}$ şi se ciocneşte elastic cu aceasta. Corpul 2, cînd ajunge în dreptul limitatorului, se ciocneşte tot elastic cu acesta, se întoarce, se ciocneşte din nou corpul 1 ş.a.m.d.

Să se determine pentru λ=3:

1) de cîte ori se ciocnesc între ele cele două corpuri;

2) vitezele corpurilor după ultima ciocnire;

3) intervalul de timp dintre prima şi ultima ciocnire;

4) distanţa dintre corpul 2 şi limitator cînd are loc ultima ciocnire.

(Se recomandă rezolvarea problemei cu ajutorul calculatorului electronic.)

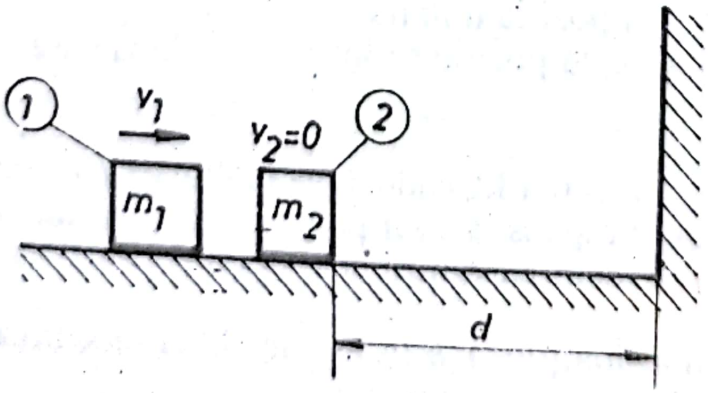


Fig. 4.6

Scanned with OKEN Scanner

4.7*. Două sfere identice avînd masele $m_1=m_2=0{,}3$ kg, sînt fixate la capetele unei bare drepte de masă neglijabilă (fig. 4.7). Ele sînt lăsate să cadă liber de la înălţimea $H=1$ m. Cînd ajung pe planul orizontal au loc ciocniri, caracterizate prin coeficienţii de restituire $k_1=0{,}8$ şi $k_2=0{,}4$.

1) Care vor fi vitezele sferelor după ciocnire?

2) Cum se va mişca bara după ciocnire?

La ce înălţimi maxime se ridică sferele?

După cît timp vor fi sferele la aceeaşi înălţime?

Care sferă ajunge mai repede pe planul orizontal şi după cît timp?

3) Ce valoare trebuie să aibă înălţimea H pentru ca sferele să ajungă şi a doua oară în acelaşi moment pe planul orizontal? În acest caz, care este intervalul de timp dintre ciocniri?

4) Care vor fi vitezele sferelor după a doua ciocnire simultană şi cum se va mişca bara după această ciocnire?

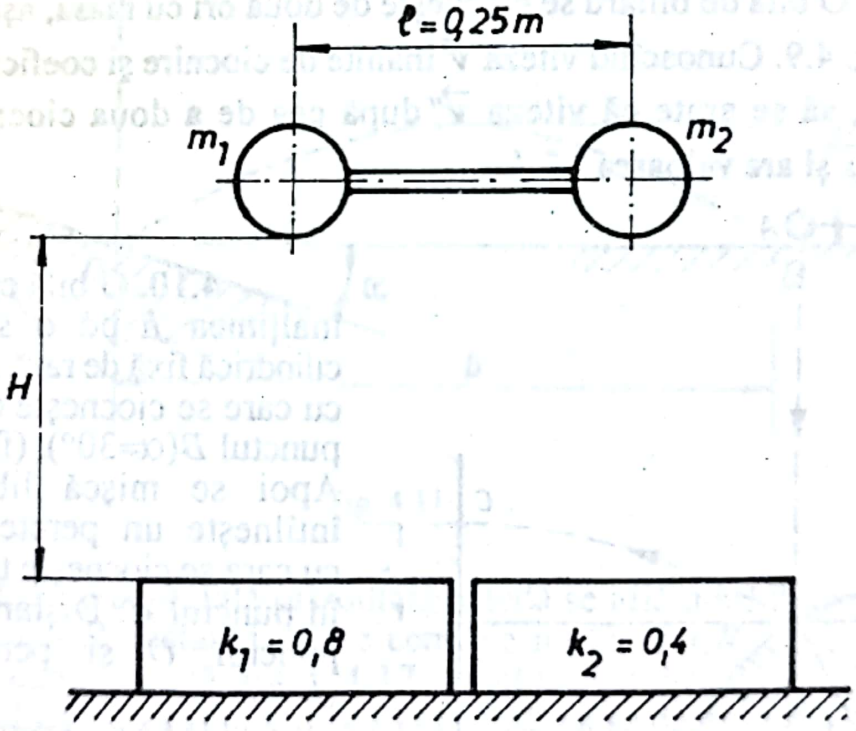


Fig. 4.7

4.8. O bilă de dimensiuni mici, mişcîndu-se cu viteza $v_1=4$ m/s se ciocneşte cu un perete fix (4.8). Cunoscînd unghiurile $\alpha=40°$ şi $\beta=62°$, să se determine coeficientul de restituire k şi viteza v_1 a bilei după ciocnire.

Scanned with OKEN Scanner

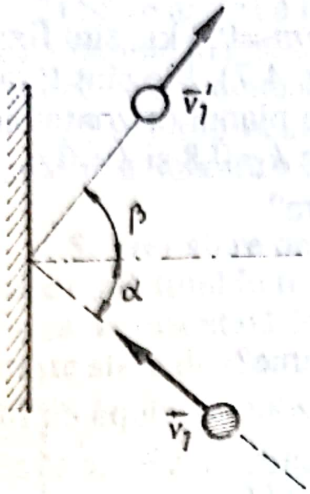


Fig. 4.8

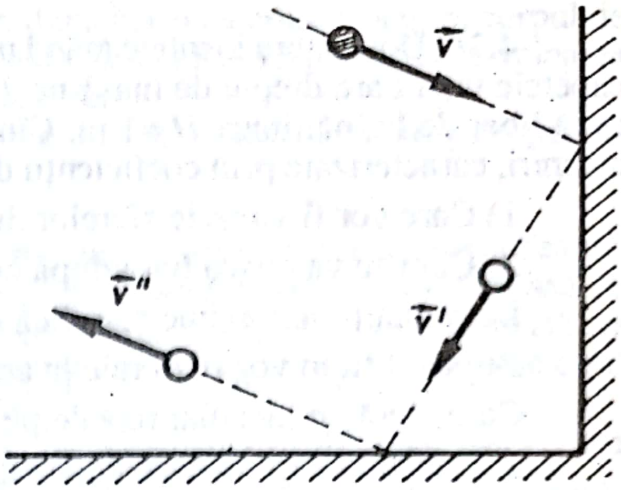


Fig. 4.9

4.9*. **O bilă de biliard se ciocneşte de două ori cu masa, aşa cum se indică în fig. 4.9. Cunoscînd viteza $\vec{v}$ înainte de ciocnire şi coeficientul de restituire k, să se arate că viteza $\vec{v}''$ după cea de a doua ciocnire este paralelă cu $\vec{v}$ şi are valoarea $v''=kv$.**

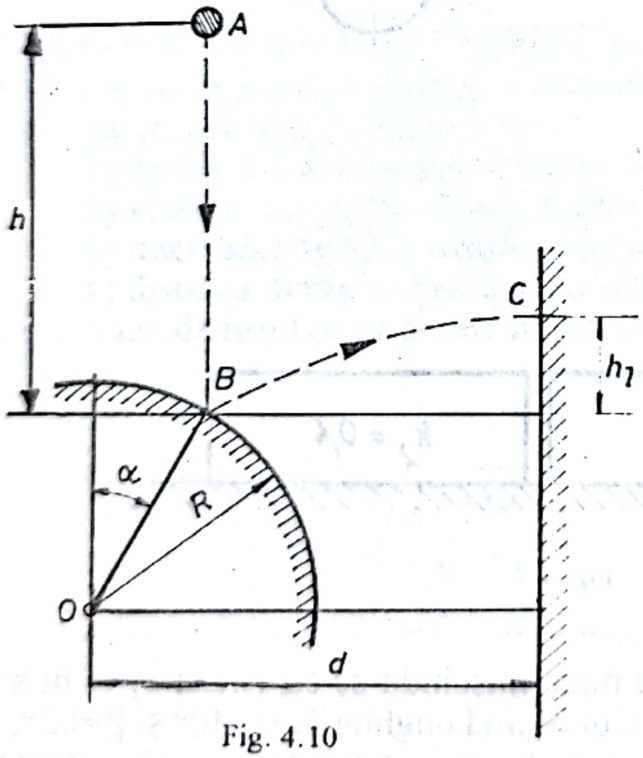


Fig. 4.10

4.10. O bilă cade de la înălţimea h pe o suprafaţă cilindrică fixă de rază $R=0{,}5$ m cu care se ciocneşte elastic în punctul $B(\alpha=30°)$, (fig. 4.10). Apoi se mişcă liber pînă întîlneşte un perete vertical cu care se ciocneşte tot elastic în punctul C. Distanţa dintre punctul O şi perete este $d=2R$.

1) Să se determine înălţimea h astfel încît în momentul ciocnirii în C viteza bilei să fie perpendiculară pe perete. Să se precizeze şi poziţia punctului C (înălţimea h_1).

Scanned with OKEN Scanner

4.11*. O bilă de masă m este lăsată să cadă de la înălţimea H pe un plan înclinat fix (fig. 4.11). După ciocnirea în punctul O, caracterizată de coeficientul de restituire k, ea se mişcă liber, iar în punctul B cade pe un plan orizontal în care se află şi punctul O.

1) Să se determine înălţimea h la care se ridică bila şi distanţa $OB=b$ în funcţie de H, k şi unghiul de înclinare a planului α. Caz particular: $k=0{,}5$; $\alpha=25°$.

2) Care este valoarea unghiului α pentru care distanţa b este maximă şi valoarea corespunzătoare a lui b dacă a) $k=1$; b) $k=0{,}5$?

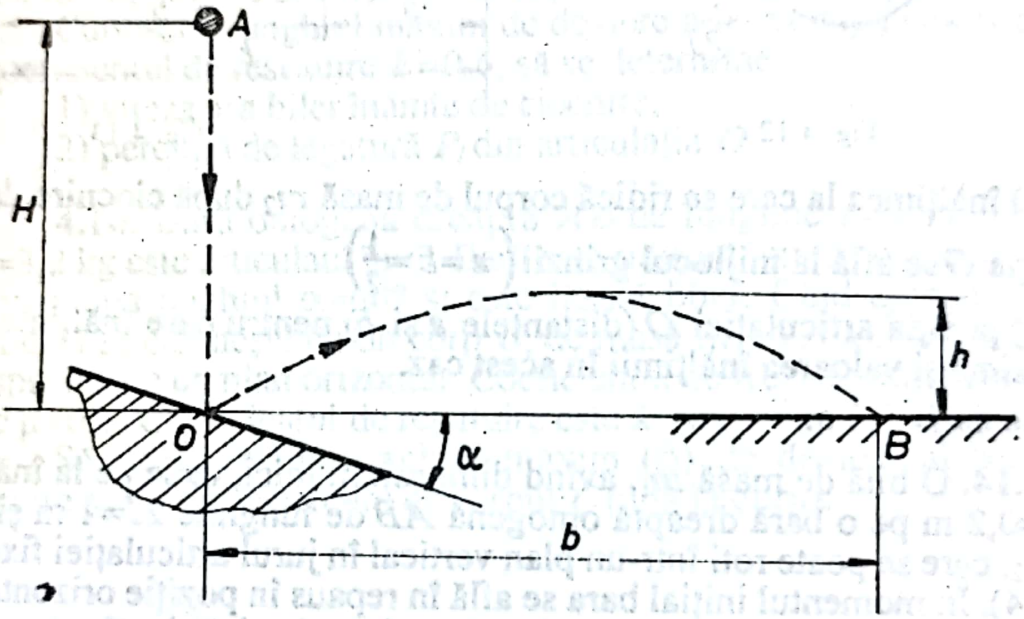


Fig. 4.11

4.12. Pe o suprafaţă orizontală netedă se află două discuri identice 1 şi 2 de rază R, distanţa dintre centrele lor fiind ηR. Spre discuri se mişcă, aşa cum se arată în fig. 4.12, un al treilea disc 3, avînd viteza v. Considerînd ciocnirea dintre discuri elastică, să se determine vitezele discurilor după ciocnire (discuţie).

4.13. O sferă de masă $m_1=5$ kg cade de la înălţimea $H=1{,}4$ m pe o grindă orizontală rigidă de masă neglijabilă (fig. 4.13), care se poate roti în jurul articulaţiei cilindrice fixe O. Pe grindă se află un corp de masă $m_2=2{,}5$ kg. Ciocnirea dintre sferă şi grindă fiind plastică, să se determine:

Scanned with OKEN Scanner

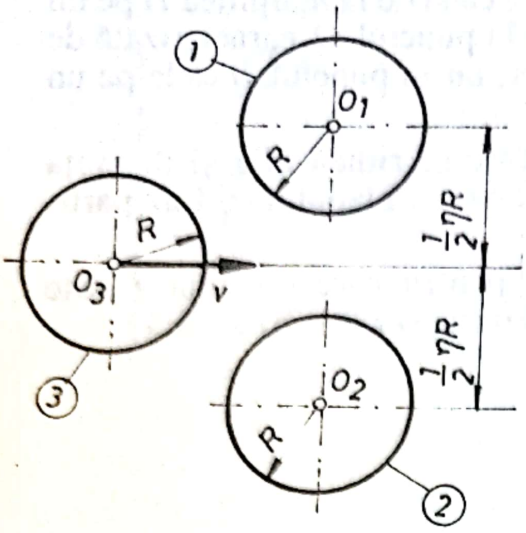


Fig. 4.12

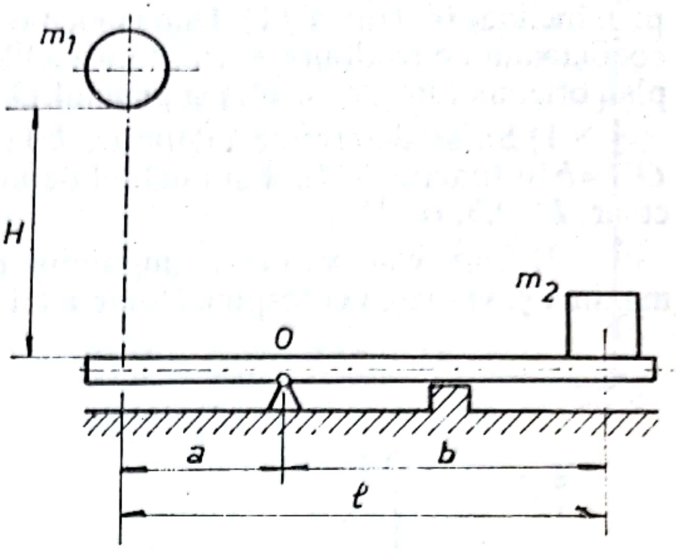


Fig. 4.13

1) înălțimea la care se ridică corpul de masă m_2 după ciocnire dacă articulația O se află la mijlocul grinzii $\left(a=b=\frac{1}{2}\right)$

2) poziția articulației O (distanțele a și b) pentru care înălțimea h este maximă și valoarea înălțimii în acest caz.

Se dă $l=1{,}2$ m.

4.14. O bilă de masă m_1, având dimensiuni mici, cade de la înălțimea $h=0{,}2$ m pe o bară dreaptă omogenă AB de lungime $2l=1$ m și de masă m_2, care se poate roti într-un plan vertical în jurul articulației fixe O (fig. 4.14). În momentul inițial bara se află în repaus în poziție orizontală. Ciocnirea dintre bilă și bară se consideră perfect elastică, iar frecarea cu aerul și frecarea din articulație sînt neglijabile.

1) Să se determine viteza bilei și viteza unghiulară a barei după ciocnire dacă $m_2=15\ m_1$.

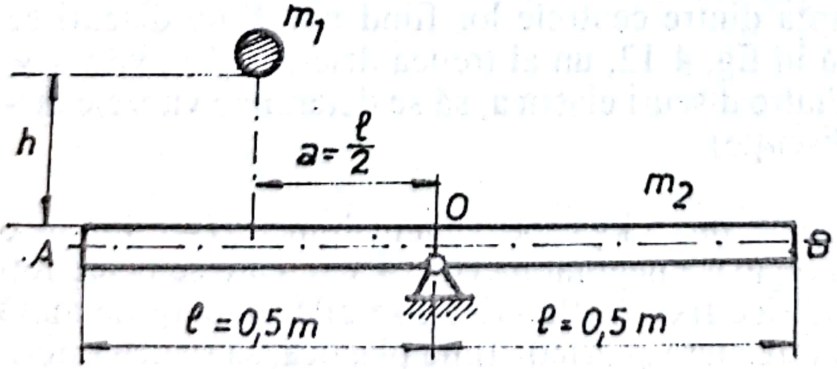


Fig. 4.14

2) După ciocnire bila în cădere mai loveşte bara?

În cazul răspunsului afirmativ, să se determine intervalul de timp dintre cele două ciocniri şi locul unde se produce a doua ciocnire.

3) Ce valoare trebuie să aibă masa m_2, pentru ca în urma primei ciocniri viteza bilei să se anuleze. În acest caz, ce valoare are viteza unghiulară a barei după ciocnire?

4) Masa m_2 avînd valoarea de la punctul 3, se mai produce ciocnire suplimentară între bilă şi bară?

4.15*. Bara omogenă OA de lungime l=1,2 m şi de masă M=4 kg, ce se poate roti în jurul unei axe orizontale, aflîndu-se în repaus în poziţia verticală (fig. 4.15), este lovită în punctul B ($OB=h$=0,8 m) de o bilă de masă m=0,5 kg, ce se mişcă în direcţie orizontală.

Cunoscînd unghiul maxim de deviere a barei după ciocnire α=30° şi coeficientul de restituire k=0,6, să se determine:

1) viteza v a bilei înainte de ciocnire;

2) percuţia de legătură P_l din articulaţia O.

4.16. Bară omogenă dreaptă AB de lungime l=1 m şi de masă m_1=3,2 kg este articulată în O. Bara este ridicată într-o poziţie în care face cu verticala unghiul α=60° şi este lăsată liber. Cînd ajunge în poziţie verticală se ciocneşte cu un corp C, de masă m_2=7,5 kg (fig. 4.16), care se sprijină pe un plan orizontal. Coeficientul de frecare dintre corp şi plan este μ=0,1. Coeficientul de restituire este k=0,6.

Să se determine unghiul maxim (β) de deviere al barei după ciocnire şi spaţiul s parcurs de corpul C pînă la oprire.

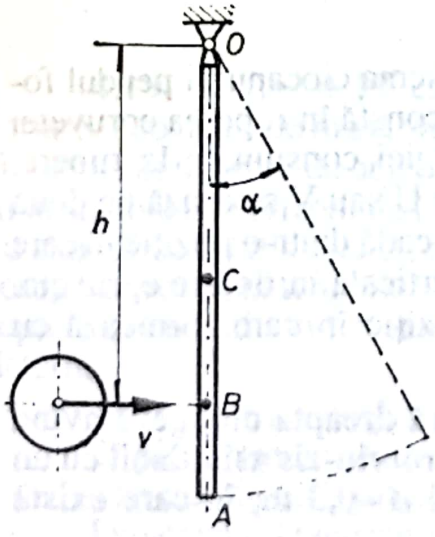


Fig. 4.15

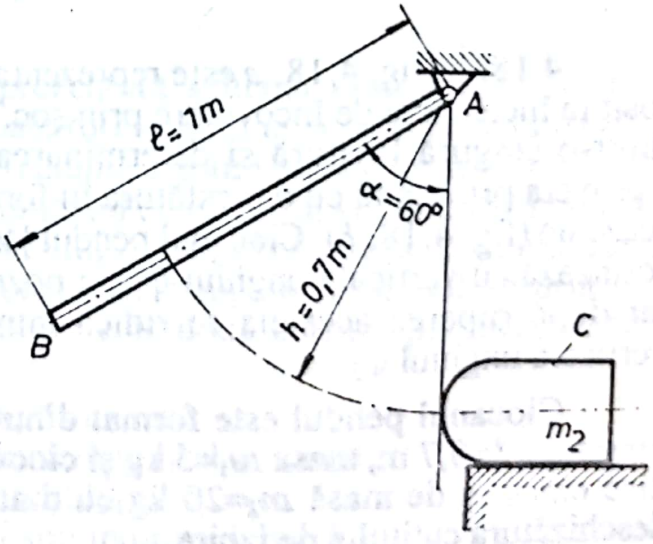


Fig. 4.16

Scanned with OKEN Scanner

4.17. Un concasor, folosit pentru zdrobirea minereului, conține toba 1 montată pe un ax orizontal în jurul căruia se poate roti, iar de tobă sînt legate prin articulații ciocanele 2 (fig. 4.17, *a*). În timpul funcționării toba se rotește cu viteză unghiulară mare, iar bucățelele de minereu, ce cad pe ciocane, sînt zdrobite prin lovire. Considerînd ciocanul ca o bară dreaptă omogenă de lungime l (fig. 4.17, *b*) și presupunînd că ciocnirile se produc la capătul A al ciocanului, să se determine poziția articulației O (distanța x) astfel încît în articulație, respectiv în lagărele tobei, să nu apară percuții de legătură.

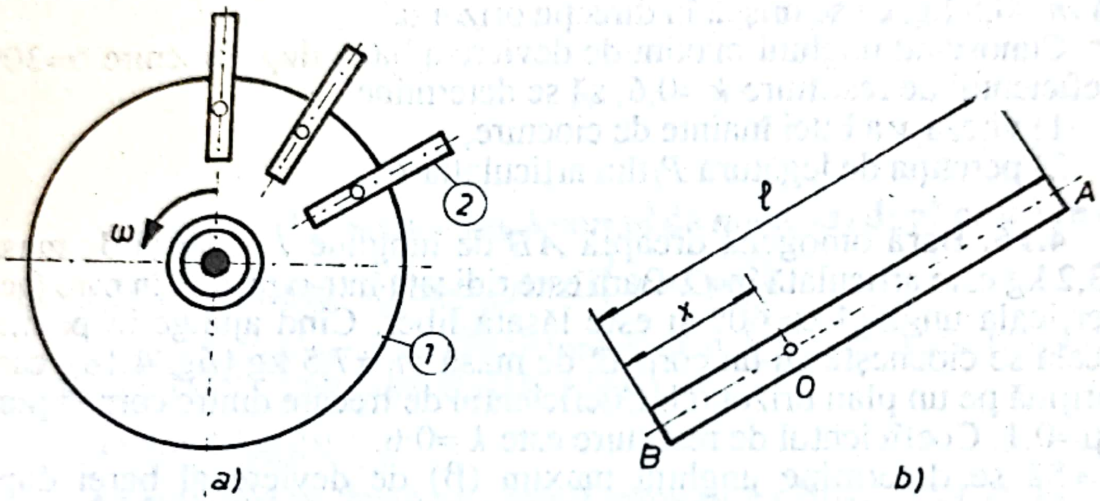


Fig. 4.17

4.18. În fig. 4.18, *a* este reprezentată schema ciocanului pendul folosit la încercarea de încovoiere prin șoc, care constă în ruperea epruvetei dintr-o singură lovitură și determinarea energiei consumate la rupere. Epruveta prevăzută cu o crestătură în formă de U sau V se așază pe două reazeme (fig. 4.18, *b*). Ciocanul pendul lăsat să cadă dintr-o poziție în care formează cu verticala unghiul φ_1, în poziția verticală întîlnește epruveta, iar după ruperea acesteia se ridică într-o poziție în care formează cu verticala unghiul φ_2.

Ciocanul pendul este format dintr-o bară dreaptă omogenă avînd lungimea l=0,7 m, masa m_1=5 kg și ciocanul propriu-zis asimilabil cu un disc omogen de masă m_2=20 kg cu diametrul d=0,3 m, în care există deschizătura cuțitului de izbire.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine:

1) distanţa dintre deschizătura cuţitului şi punctul O (axa de rotaţie) astfel încît să nu apară percuţie de legătură în lagărul O;

2) viteza ciocanului cînd întîlneşte epruveta dacă $\varphi_1=150°$;

3) energia consumată la rupere dacă $\varphi_2=52°$.

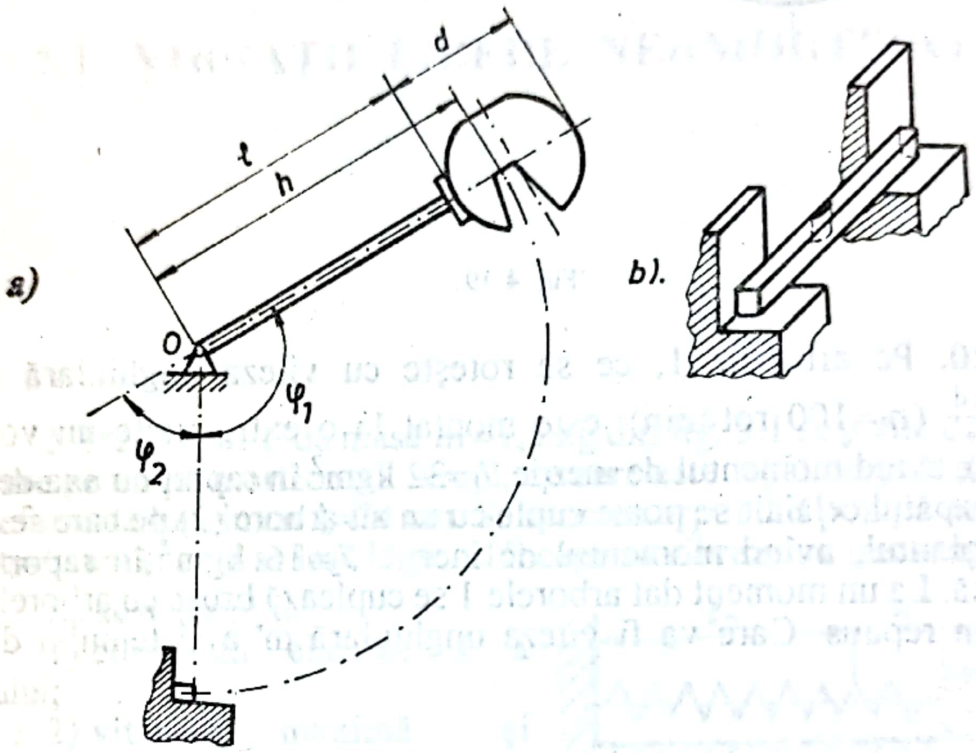


Fig. 4.18

4.19. În fig. 4.19 este reprezentată schema unui mecanism de forjare. Ciocanul de masă M se poate roti în jurul unei axe orizontale (B), fiind pus în mişcare de acţiunea percutantă a unui volant care se roteşte tot în jurul unei axe orizontale (A). Momentul de inerţie al volantului în raport cu axa lui de rotaţie este J_1, al ciocanului J_2. Ştiind că viteza unghiulară de rotaţie a volantului înainte de ciocnire este ω_1, iar ciocanul se află în repaus şi considerînd ciocnirea dintre cele două corpuri plastică, să se determine:

1) vitezele lor unghiulare după ciocnire;

2) pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii;

3) percuţia de legătură din articulaţia B.

Dimensiunile mecanismului sînt indicate în figură.

Scanned with OKEN Scanner

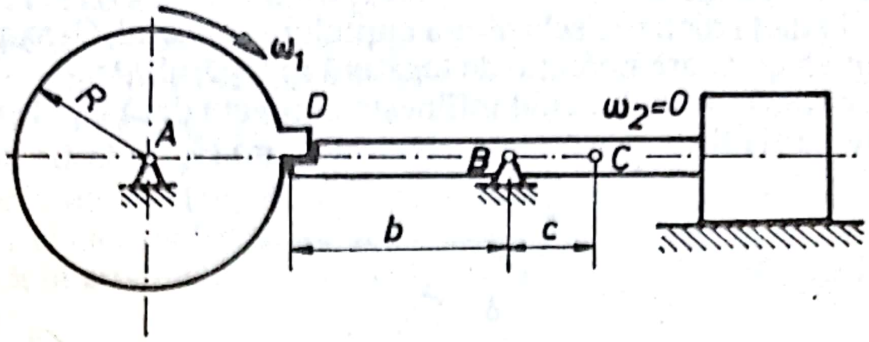


Fig. 4.19.

4.20. Pe arborele 1, ce se roteşte cu viteza unghiulară $\omega_1 = 10{,}472 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (n_1=100 rot/min), este montat la o extremitate un volant (fig. 4.20), avînd momentul de inerţie J_1=32 kgm^2 în raport cu axa de rotaţie. La capătul celălalt se poate cupla cu un alt arbore (2) pe care se află montat volantul, avînd momentul de inerţie J_2=16 kgm^2 în raport cu aceeaşi axă. La un moment dat arborele 1 se cuplează brusc cu arborele 2, care era în repaus. Care va fi viteza unghiulară ω' a sistemului după cuplare?

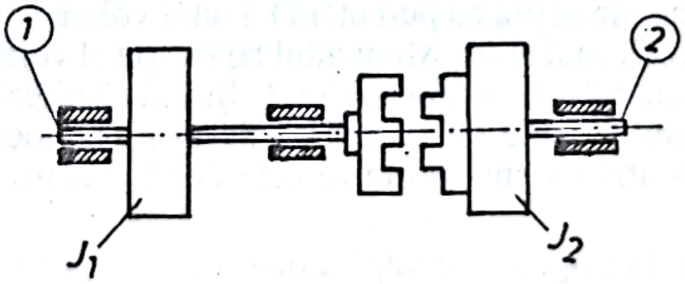


Fig. 4.20

Scanned with OKEN Scanner

5. VIBRAȚII MECANICE

5.1. VIBRAȚII LIBERE NEAMORTIZATE

5.1*. Corpul C de masă m=1,5 kg din fig. 5.1 se poate deplasa fără frecare pe un plan orizontal. Arcul, de care este legat corpul, are în stare nedeformată lungimea l_0=24 cm. Se scoate corpul din poziția de echilibru cu x_0=6 mm și apoi se lasă liber. El începe să vibreze cu frecvența f=5 Hz.

Să se determine:

1) constanta elastică k a arcului;

2) viteza maximă și accelerația maximă a corpului;

3) forța elastică maximă din arc.

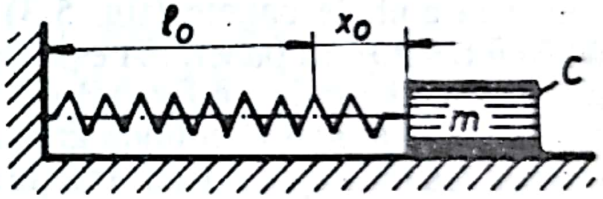


Fig. 5.1

5.2. Un corp de greutate G este suspendat prin intermediul unui arc avînd un capăt fixat în punctul A (fig. 5.2). Arcul are în stare nedeformată lungimea l. Alungirea statică a arcului, provocată de greutatea G, este f_{st}. Corpul este adus în poziția M_0 ($AM_0=a>l$) și lăsat să cadă fără viteză inițială.

Să se determine:

1) perioada de oscilație a corpului;

2) legea mișcării;

3) forța maximă de întindere a arcului.

Aplicație numerică: G=2N; l=40 cm; f_{st}=4 cm; a=42 cm.

Scanned with OKEN Scanner

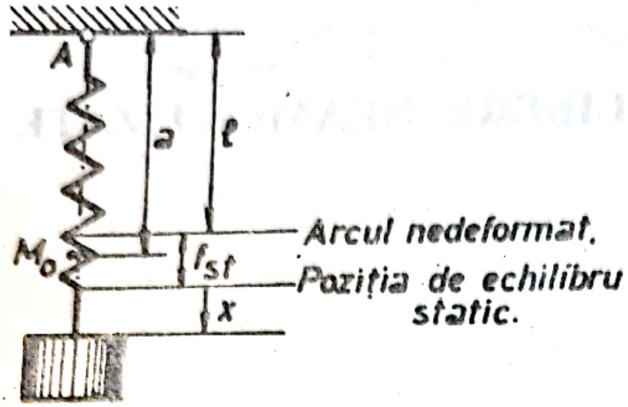


Fig. 5.2

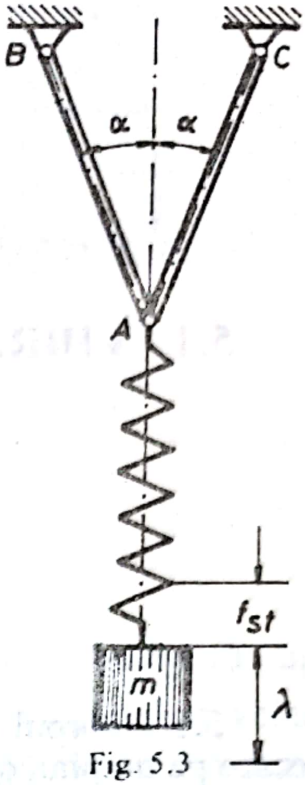


Fig. 5.3

5.3. Un suport este format din barele drepte rigide AB şi AC, articulate la ambele capete (fig. 5.3). Fiecare bară formează cu verticala unghiul $\alpha=20°$. În punctul A este legat capătul unui arc elicoidal. De capătul celălalt al arcului se fixează un corp de masă $m=1{,}45$ kg. Deformaţia statică a arcului sub acţiunea greutăţii corpului este $f_{st}=1$ cm. Corpul se trage în jos pînă apare o deformaţie suplimentară $\lambda=3{,}8$ cm şi apoi se lasă liber.

1) Să se determine legea mişcării corpului şi eforturile ce iau naştere în cele două bare.

2) Cum se modifică rezultatele dacă între corp şi arc se intercalează un fir flexibil şi inextensibil de lungime $l=8{,}5$ cm?

5.4*. Deformaţia statică a arcului din fig. 5.4 sub acţiunea greutăţii celor două corpuri este $f_{st}=3$ cm. Corpul ① de masă $m_1=3{,}2$ kg este legat de arc, iar corpul ② de masă $m_2=1{,}6$ kg este aşezat pe primul. În momentul iniţial deformaţia arcului este $l > 2f_{st}$ şi sistemul se află în repaus.

Să se determine:

1) poziţia în care corpul 2 se desprinde de 1 şi viteza corpurilor în acest moment dacă $l=8{,}5$ cm;

Scanned with OKEN Scanner

2) timpul după care cele două corpuri se întîlnesc din nou, locul întîlnirii şi vitezele corpurilor în acest moment;

3) valoarea deformaţiei iniţiale l pentru care întîlnirea corpurilor are loc în aceeaşi poziţie în care se produce desprinderea corpului 2.

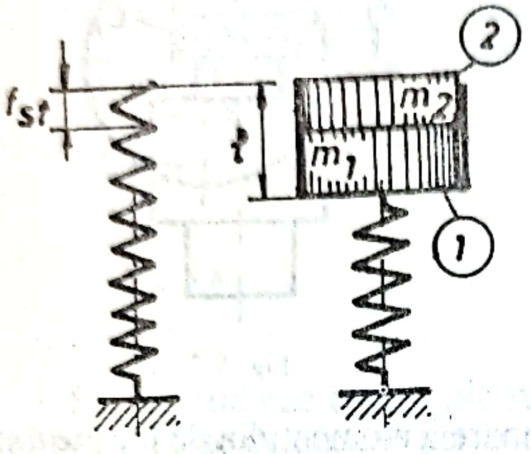


Fig. 5.4

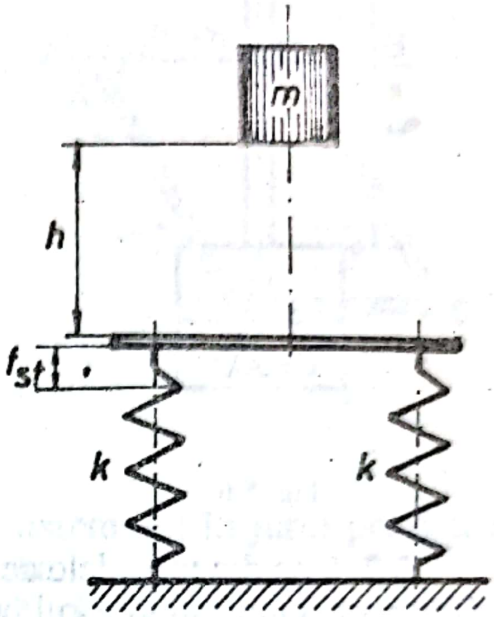


Fig. 5.5

5.5. Un corp de masă m=10 kg cade liber fără viteză iniţială de la înălţimea h =0,5 m pe o placă orizontală de masă neglijabilă montată pe patru arcuri identice, avînd fiecare constanta elastică k =25·10^3 N/m (fig. 5.5).

Să se determine:

1) Centrul de vibraţie al corpului după ce ajunge pe placă.

2) Legea orară, frecvenţa, perioada şi amplitudinea mişcării vibratorii.

3) Forţa elastică maximă exercitată de fiecare arc asupra corpului.

5.6. De o bară dreaptă încastrată la un capăt este legat rigid un disc omogen aşa cum se arată în fig. 5.6. Bara are lungimea l=1 m, secţiune circulară cu diametrul d=10 mm, iar discul are masa M=10,2 kg şi diametrul D=300 mm.

Ştiind că frecvenţa proprie a vibraţiilor de răsucire, determinată pe cale experimentală este f_n= 4,2 Hz, să se calculeze modulul de elasticitate transversal G al materialului barei.

Scanned with OKEN Scanner

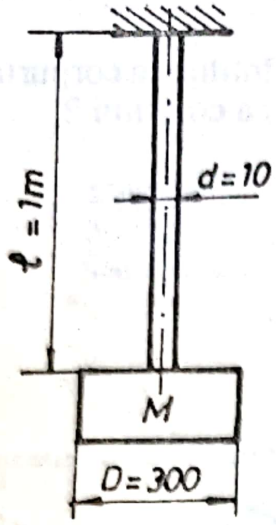


Fig. 5.6

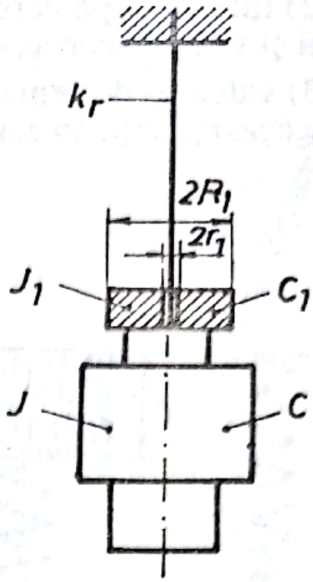


Fig. 5.7

5.7. Una din metodele de determinare a momentului de inerţie axial al unui corp, cum este rotorul unui motor electric, se bazează pe vibraţiile de răsucire. Corpul se suspendă printr-un fir (fig. 5.7), ce are elasticitate la torsiune şi se măsoară perioada T a oscilaţiilor de răsucire. Apoi se ataşează corpului un alt corp de masă M_1, cunoscută, pentru care momentul de inerţie J_1 este cunoscut sau poate fi calculat uşor [pentru corpul cilindric din fig. 5.7, $J_1=\frac{M_1}{2}(R_1^2+r_1^2)$].

Se măsoară din nou perioada T_1 a oscilaţiilor de răsucire.

Să se determine momentul de inerţie al corpului în raport cu axa de rotaţie în funcţie de T, T_1 şi J_1.

Aplicaţie numerică: T=1,3 s, T_1=1,7 s, M_1=0,5 kg, R_1=1,9 cm, r_1=0,5 cm.

5.8. Un disc plin omogen de rază r şi masă m se poate roti în jurul axei fixe O, perpendiculară pe disc (fig. 5.8). De disc este fixată rigid o bară AB, de greutate neglijabilă. Capătul B este legat printr-un arc, avînd constanta elastică k, de un perete fix. Distanţa $OB=a$. Să se determine perioada micilor oscilaţii.

5.9. Paralelogramul articulat $ABCD$ (A şi D sînt articulaţii exterioare) din fig. 5.9 se află într-un plan vertical. Barele AB şi CD sînt identice, avînd fiecare lungimea l_1 şi masa m_1, iar bara BC are lungimea l_2 şi masa m_2.

Scanned with OKEN Scanner

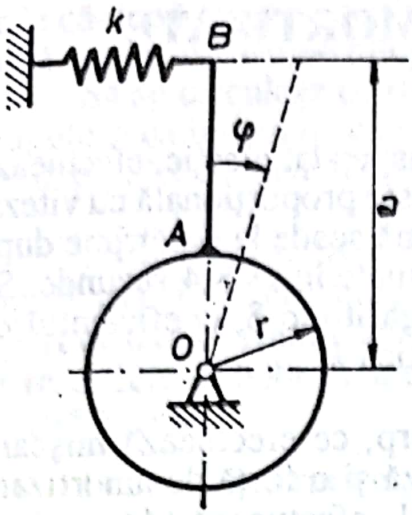


Fig. 5.8

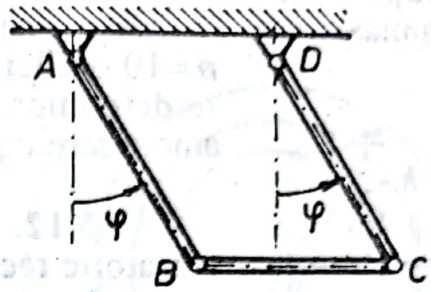


Fig. 5.9

Să se studieze oscilaţiile mici ale sistemului în jurul poziţiei de echilibru şi să se determine perioada acestora.

Aplicaţie numerică: l_1=0,82 m; m_1=2,5 kg; l_2=0,45 m; m_2=1,5 kg.

5.10*. Se dă un sistem format din bara omogenă AB de lungime l şi de masă m_1, articulată în A şi din masa punctiformă m_2, fixată în extremitatea B. La distanţa a de articulaţie este fixat un arc vertical avînd constantă elastică k (fig. 5.10). În poziţia de echilibru static, bara este orizontală. Să se determine pulsaţia vibraţiilor mici ale sistemului. Să se determine masele m_{e1} şi m_{e2} din figurile 5.10, *b* şi 5.10, *c* în aşa fel ca aceste sisteme să fie echivalente cu cel dat, arcurile avînd tot constanta elastică k. Bara sistemului din fig. 5.10, *b* are masă neglijabilă.

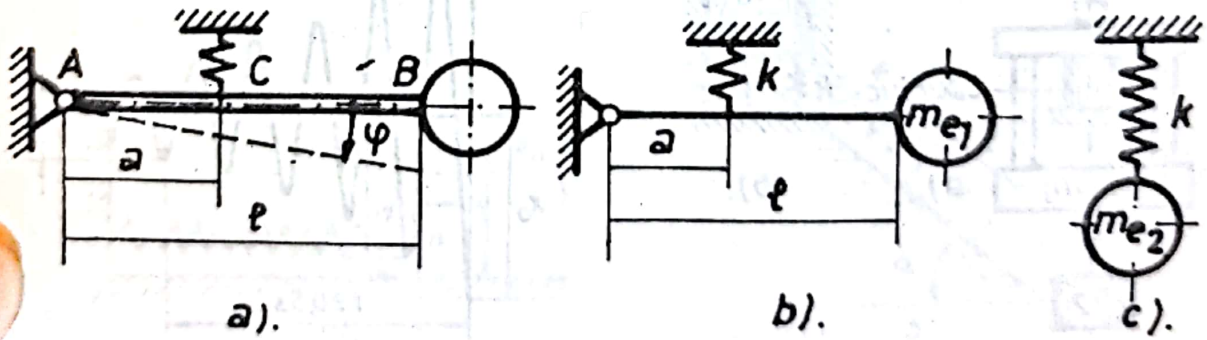


Fig. 5.10

Scanned with OKEN Scanner

5.2. VIBRAŢII LIBERE AMORTIZATE

5.11*. Un corp de masă m =0,25 kg, suspendat elastic, efectuează vibraţii libere amortizate. Forţa de amortizare este proporţională cu viteza. Prin măsurători se constată că elongaţia maximă scade la o pătrime după n =10 oscilaţii complete efectuate în t =8,4 secunde. Să se determine decrementul logaritmic δ, coeficientul de amortizare c şi constanta elastică k.

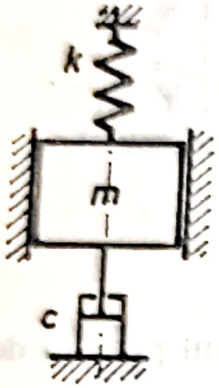


Fig. 5.11

5.12. Asupra unui corp, ce efectuează mişcare vibratorie rectilinie, acţionează şi o forţă de amortizare proporţională cu viteză. El efectuează 4 oscilaţii complete într-o secundă.

1) Să se determine factorul de amortizare λ şi decrementul logaritmic δ, dacă în decursul a 10 secunde elongaţia maximă a vibraţiilor se micşorează la o cincime din valoarea iniţială.

2) Cu cît se micşorează perioada de oscilaţie dacă se îndepărtează forţa de amortizare?

5.13. Constanta elastică k şi coeficientul de amortizare c ale unui arc de cauciuc (bloc de cauciuc cilindric) se determină experimental. Pe arcul de cauciuc se aşază un cadru de masă m_1=5 kg, de care se atîrnă prin intermediul unui fir un corp de masă m_2=3 kg (fig. 5.13.1, *a*).

Se arde firul, după ce masa m_1 efectuează vibraţii libere amortizate. Aceste vibraţii se înregistrează şi rezultă vibrograma din fig. 5.13.2. Se

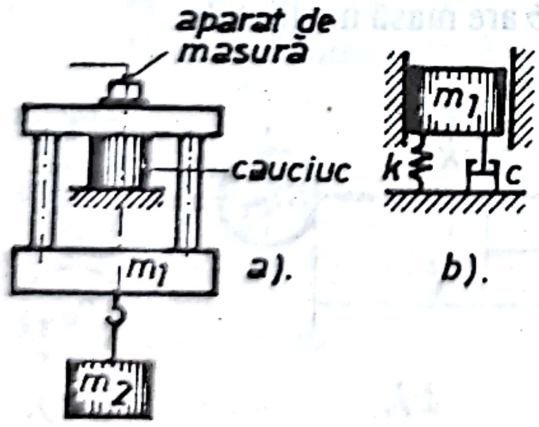


Fig. 5.13.1

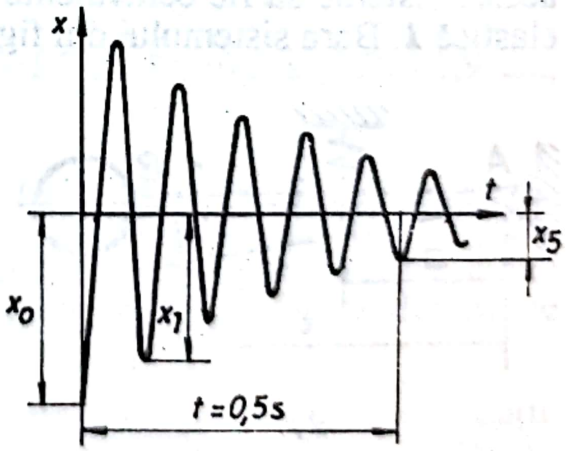


Fig. 5.13.2

Scanned with OKEN Scanner

vede că după cinci oscilaţii complete, efectuate în $t=0{,}5$ s, elongaţia maximă devine o pătrime din prima elongaţie maximă.

Să se calculeze constanta elastică k şi coeficientul de amortizare c în ipoteza că blocul de cauciuc se poate modela printr-un arc elicoidal legat în paralel cu un amortizor (fig. 5.13.1, *b*).

5.14. Acul indicator al unui galvanometru este legat de bobină (fig. 5.14), care are momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie $J=4\cdot10^{-4}$ kg cm^2. Arcul de readucere a bobinei are constanta elastică $k=10^{-6}$ N cm.

1) Să se determine pulsaţia şi perioada proprie a bobinei.

2) Cît de mare trebuie să fie coeficientul de amortizare c pentru ca pseudopulsaţia vibraţiilor amortizate să fie de $q=1{,}1$ ori mai mare decît perioada proprie T_n?

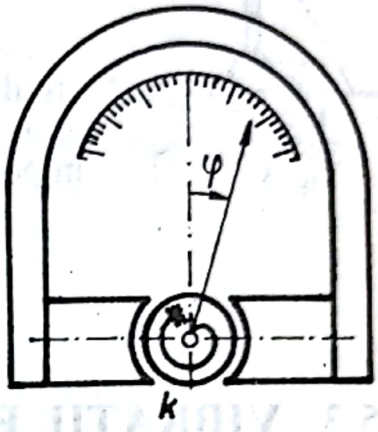


Fig. 5.14

5.15*. Corpul C de masă $m=4$ kg din fig. 5.15, *a* legat de un arc cu constanta elastică $k=6{,}27$ N/cm se spijină pe un plan orizontal aspru ($\mu=0{,}032$). Corpul se îndepărtează cu $x_0=15$ mm din poziţia în care arcul este nedeformat şi se lasă liber.

1) După cîte oscilaţii şi unde se opreşte corpul C?

2) Cum se modifică rezultatele, dacă corpul C se află pe un plan înclinat faţă de orizontală cu unghiul $\alpha=35°$ (fig. 5.15, *b*)? În acest caz x_0 se măsoară din poziţia de echilibru st ic a corpului pe planul înclinat considerat fără frecare.

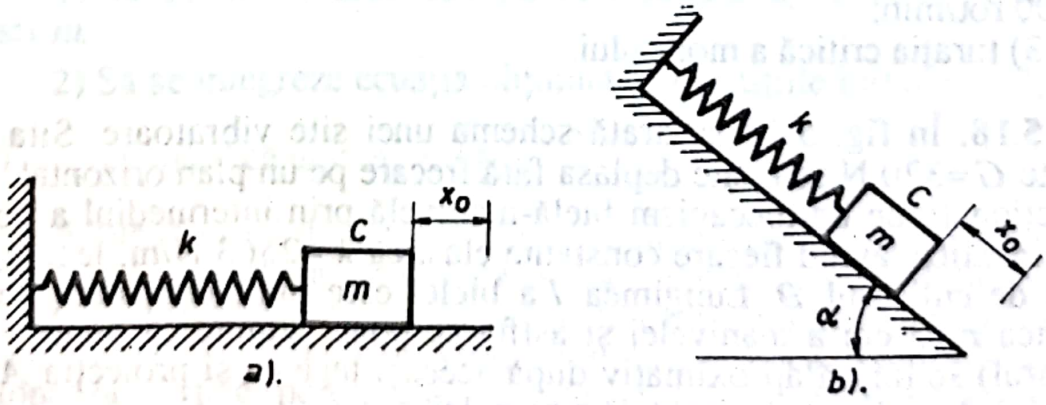


Fig. 5.15

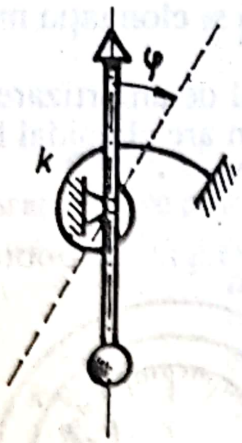


Fig. 5.16

5.16. Acul indicator al unui instrument de măsură are momentul de inerţie $J=4\cdot10^{-2}$ kgcm^2 în raport cu axa lui de rotaţie. Momentul de readucere este produs de un arc spiral (fig. 5.16), avînd constanta elastică $k=0{,}25$ Ncm. Datorită frecării, în articulaţie apare un moment constant $M_f=5\cdot10^{-3}$ Ncm.

1) Să se determine perioada vibraţiilor libere.

2) Dacă acul este scos din poziţia $\varphi=0$, unde arcul spiral este netensionat, cu unghiul $\varphi_0=30°$ şi apoi lăsat liber, după cîte semicicluri ajunge din nou în poziţie de repaus.

5.3. VIBRAŢII FORŢATE FĂRĂ AMORTIZARE

5.17. Un motor electric (fig. 5.17), de greutate $Q=10\,000$ N, este fixat pe o placă orizontală de greutate neglijabilă, susţinută de patru arcuri identice, avînd fiecare constantă elastică $k=60\,000$ N/cm. Rotorul motorului, de greutate $P=2\,000$ N, are excentricitate $e=0{,}1$ mm.

Să se determine:

1) pulsaţia şi frecvenţa proprie ale sistemului;

2) amplitudinea vibraţiilor forţate dacă turaţia motorului este $n=1300$ rot/min;

3) turaţia critică a motorului.

5.18. În fig. 5.18 se arată schema unei site vibratoare. Sita de greutate $G=320$ N se poate deplasa fără frecare pe un plan orizontal. Ea este acţionată de un mecanism bielă-manivelă prin intermediul a două arcuri identice, avînd fiecare constanta elastică $k=2563$ N/m, legate de sită şi de culisorul B. Lungimea l a bielei este mult mai mare decît lungimea $r=3$ cm a manivelei şi astfel se poate admite că punctul B (culisorul) se mişcă aproximativ după aceeaşi lege ca şi proiecţia A' a punctului A pe direcţia orizontală a planului .

Scanned with OKEN Scanner

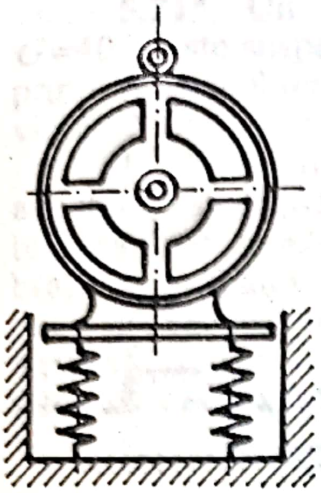


Fig. 5.17

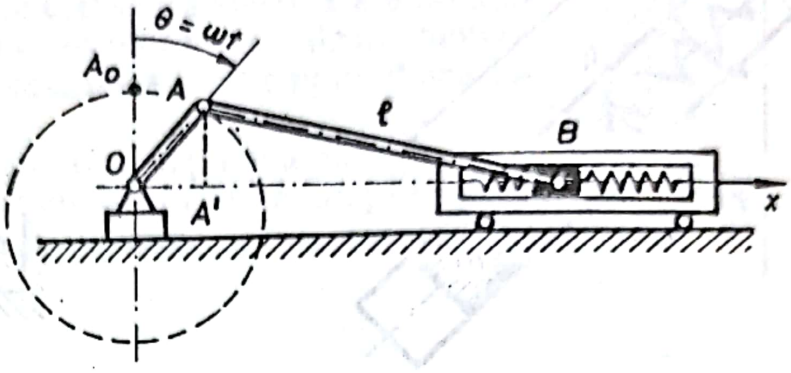


Fig. 5.18

Să se determine:

1) Amplitudinea vibraţiilor forţate ale sitei dacă manivela efectuează $n=100$ rotaţii pe minut.

2) Turaţia de rezonanţă.

Forţele de amortizare se vor neglija.

5.19. Un tub se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul articulaţiei fixe O (fig. 5.19), axa tubului mişcîndu-se într-un plan vertical. În tub poate aluneca fără frecare o masă m, care este legată de un arc cu constanta elastică k, arcul avînd în stare nedeformată lungimea a.

1) Să se stabilească ecuaţia diferenţială a mişcării relative a masei m.

2) Să se integreze ecuaţia obţinută în condiţiile iniţiale $t=0$, $r=a$, $\dot{r}=0$, presupunînd că $\omega < \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

5.20*. Corpul de masă m, legat de un arc cu constanta elastică k (fig. 5.20.1), se poate mişca fără frecare pe un plan orizontal. În momentul iniţial corpul se află în repaus în poziţia în care arcul este nedeformat. Să se determine amplitudinea vibraţiilor finale dacă asupra corpului acţionează forţele perturbatoare indicate în fig. 5.20.2, *a* (impuls dreptunghiular), *b* (rampă limitată), *c* (impuls sinusoidal).

În ce condiţii aceste amplitudini devin maxime?

Scanned with OKEN Scanner

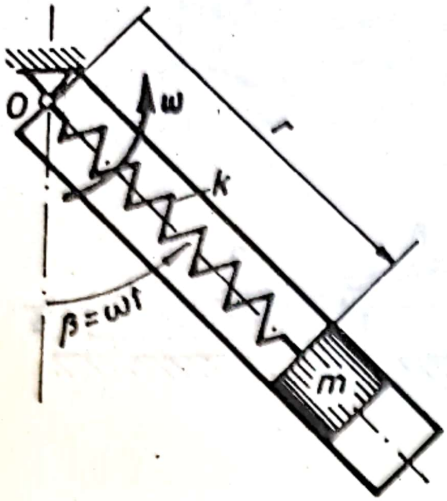


Fig. 5.19

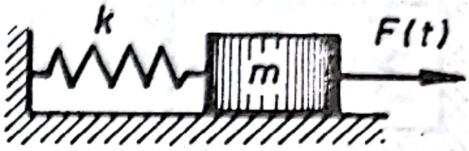
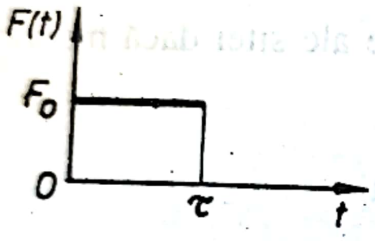
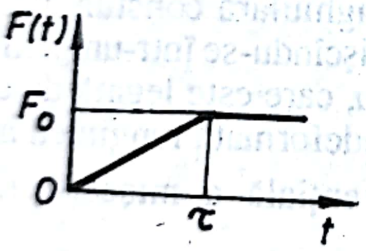


Fig. 5.20.1



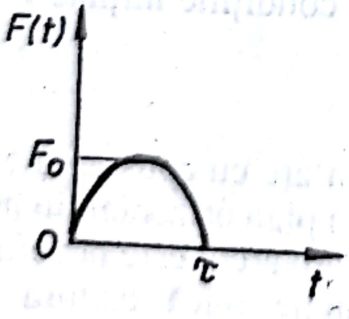
$$F(t) = \begin{cases} F_0 \ pt.\ 0 \leq t \leq \tau \\ 0 \ pt.\ t > \tau \end{cases}$$

a).



$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{\tau} \ pt.\ 0 \leq t \leq \tau \\ F_0 \ pt.\ t > \tau \end{cases}$$

b).



$$F(t) = \begin{cases} F_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t \ pt.\ 0 \leq t \leq \tau \\ 0 \ pt.\ t > \tau \end{cases}$$

c).

Fig. 5.20.2

Scanned with OKEN Scanner

5.21*. Un instrument de măsură de greutate G=40 N este suspendat de tavanul unei hale industriale prin intermediul unui arc. Datorită unor maşini, tavanul, vibrează armonic cu frecvenţa f=50 Hz.

1) Să se determine constanta elastică k a arcului astfel încît amplitudinea vibraţiilor forţate ale instrumentului să fie de n =20 ori mai mică decît amplitudinea vibraţiilor tavanului.

2) Să se calculeze acceleraţia maximă şi forţa maximă transmisă instrumentului dacă amplitudinea vibraţiilor tavanului este r=0,5 mm.

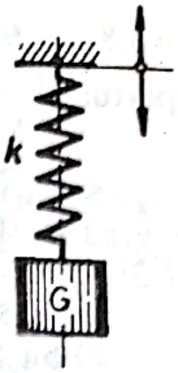


Fig. 5.21

5.4. VIBRAŢII FORŢATE CU AMORTIZARE

5.22*. Asupra corpului de masă m =2 kg din fig. 5.22, rezemat pe un arc elicoidal şi un amortizor vîscos, acţionează o forţă de excitaţie armonică $F(t) = F_0 \sin \omega t$, avînd amplitudinea F_0=3,2 N.

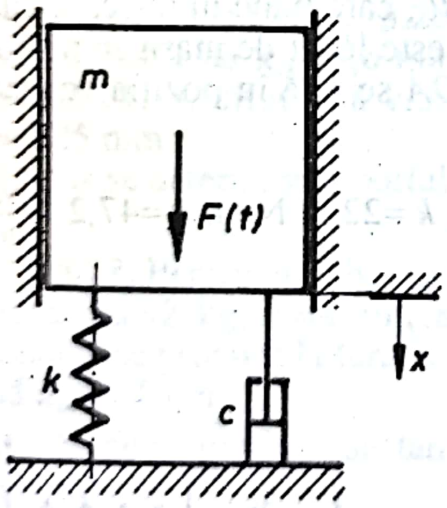


Fig. 5.22

Experimental se constată că rezonanţa se produce la frecvenţa f_r=4,8 Hz, amplitudinea de rezonanţă fiind x_{or}=2,3 cm.

1) Să se determine constanta elastică k a arcului şi coeficientul de amortizare c. Se va presupune că $c \ll c_{cr}$.

2) Care este amplitudinea vibraţiilor forţate, dacă frecvenţa de excitaţie este f=4 Hz. Cum se modifică această amplitudine dacă se înlătură amortizorul?

5.23. Un sistem vibrant, ca cel din fig. 5.22, este excitat cu o forţă armonică $F(t)=F_0 \sin \omega t$. Din măsurători se ştie că amplitudinea vibraţiilor forţate la rezonanţă este x_{or}=14 mm, iar la o frecvenţă de excitaţie

Scanned with OKEN Scanner

$f=0{,}8\ f_r$ (f_r =frecvenţa de rezonanţă) $x_0=8{,}2$ mm. Să se determine raportul, $\frac{c}{c_{cr}}$ presupunînd $c \ll c_{cr}$.

5.24. În fig. 5.24 este reprezentată schema unui sistem vibrant cu un grad de libertate cu acţionare cinematică. Se cunosc: $r=1{,}5$ cm, $m=20$ kg, $k=84$ N/cm, $c=65$ Ns/m.

1) Să se deducă ecuaţia diferenţială a mişcării masei m.

2) Să se determine amplitudinea vibraţiilor forţate şi defazajul dintre această mişcare şi cea de excitaţie (x_1) dacă $\omega=12\ s^{-1}$.

3) Să se calculeze forţa elastică maximă din arc la aceeaşi pulsaţie de excitaţie.

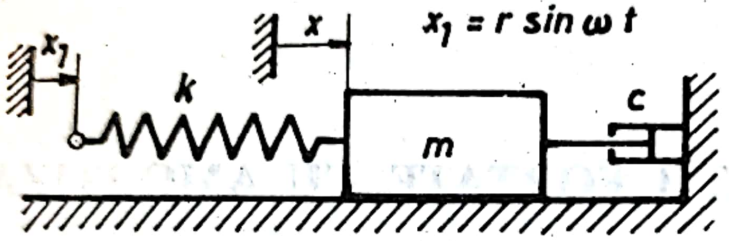


Fig. 5.24

5.25. În fig. 5.25 este reprezentată schema unui sistem vibrant cu acţionare cinematică, format dintr-un corp de masă m, un arc elicoidal cu constanta elastică k şi un amortizor cu coeficientul de amortizare c. Manivela OA de lungime r se roteşte în jurul articulaţiei fixe O cu viteza unghiulară constantă ω, antrenînd culisa BC, care pune în mişcare cilindrul amortizorului. Pistonul amortizorului este legat de masa m printr-o tijă rigidă. În momentul iniţial manivela OA se află în poziţia verticală superioară şi arcul este nedeformat.

Să se studieze mişcarea masei m.

Date numerice: $m=5$ kg, $r=2{,}5$ cm, $k=2250$ N/m, $c=47{,}2\ \frac{Ns}{m}$, $\omega=24$ rad/s.

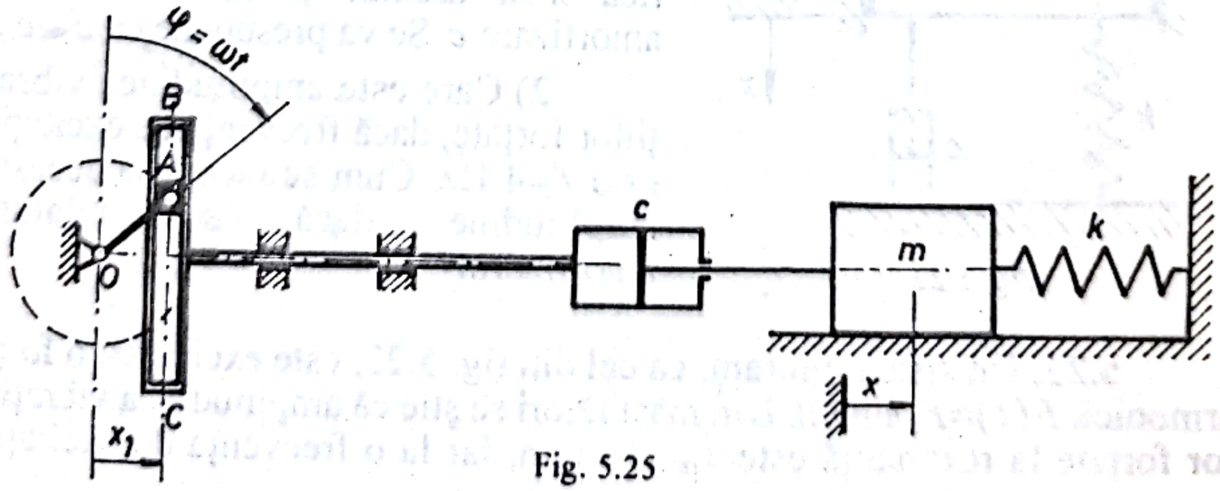


Fig. 5.25

Scanned with OKEN Scanner

5.26*. În fig. 5.26 este redat modelul unui vibrator mecanic cu excentrice, care se foloseşte des la generarea vibraţiilor. Într-o carcasă de masă m se rotesc în sensuri opuse două excentrice de masă $m_0/2$ fiecare, cu aceeaşi viteză unghiulară ω. Fiecare excentric se află la distanţa r de axa sa de rotaţie. Carcasa este aşezată pe o suspensie elastică, avînd constanta k. Există o amortizare vîscoasă, coeficientul de amortizare fiind c. Să se studieze mişcarea vibratorului şi să se determine amplitudinea vibraţiilor forţate şi pulsaţia de rezonanţă. Aplicaţie numerică: m_0=0,5 kg, m =49,5 kg, k =540 N/cm, c =1,6 Ncm^{-1}s, r=2,5 cm, ω=31,4 rad/s.

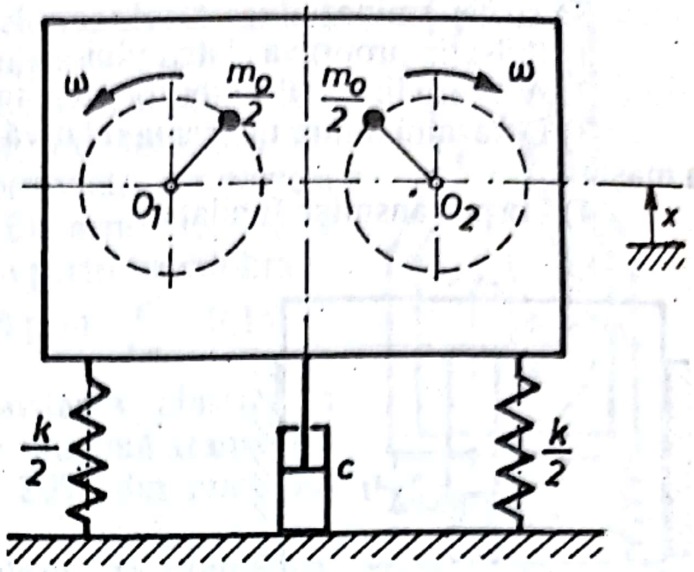


Fig. 5.26

5.27. Se consideră un vibrator cu mase excentrice, rezemat elastic şi cu amortizare ca în fig. 5.26. Amplitudinea de rezonanţă, determinată experimental este x_{or}=7,6 mm. Mărind turaţia mult peste rezonanţă se constată că amplitudinea vibraţiilor forţate tinde către valoarea limită x_{or}=0,85 mm.

Să se determine raportul de amortizare $\frac{c}{c_{cr}}$.

5.28. Pentru un vibrator cu mase excentrice, ca cel din fig. 5.26, se cunosc: m_0=2 kg, r =4 cm, m =180 kg. Experimental se constată că rezonanţa se produce la turaţia n_r=850 rot/min, amplitudinea de rezonanţă fiind x_{or}=1,8 cm.

Să se determine constanta elastică k a suspensiei şi coeficientul de amortizare c.

5.29. O maşină de masă m =250 kg este suspendată pe un arc cu constanta elastică k =3,6·10^6 N/m şi un amortizor cu c =0,2 c_{cr}. Maşina are un piston de masă m_0=3,4 kg, care se mişcă pe verticală după legea x_1=r sin ωt (fig. 5.29), unde r=4,5 cm, ω=168 s^{-1}.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine:

1) Pulsaţia proprie a sistemului.

2) Amplitudinea vibraţiei forţate a maşinii.

3) Defazajul dintre mişcarea relativă a pistonului şi vibraţia forţată a maşinii.

4) Forţa transmisă fundaţiei.

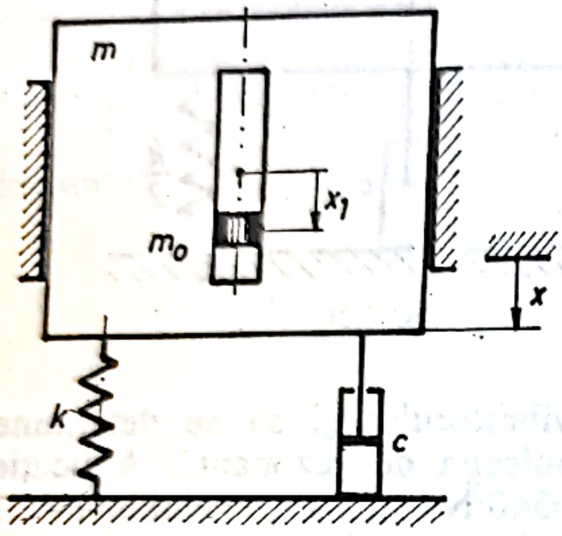


Fig. 5.29

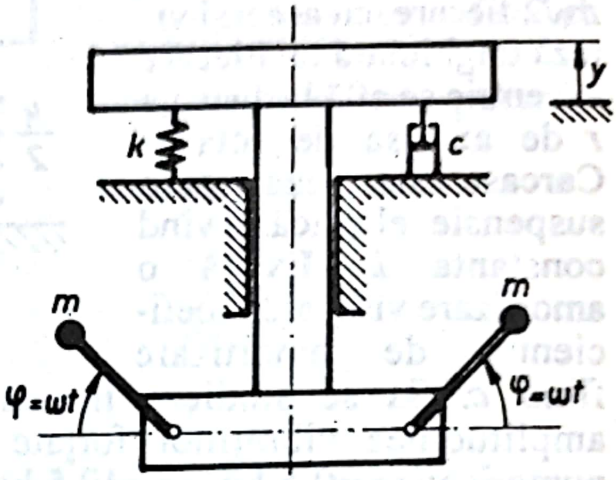


Fig. 5.30

5.30. În fig. 5.30 este reprezentată scnema unei mese vibrante cu excitaţie inerţială, ce se poate folosi la încercarea aparatelor la vibraţii. Partea mobilă a instalaţiei, de masă M=50 kg, se sprijină pe un suport elastic modelat prin arcul cu constanta elastică k=25 N/mm şi amortizor vîscos caracterizat prin coeficientul de amortizare c. Acţionarea se face de la un motor prin intermediul unui angrenaj cu roţi dinţate, care asigură rotirea uniformă cu aceeaşi viteză unghiulară ω şi în sensuri opuse a celor patru braţe de lungime r=8 cm. La extremitatea fiecărui braţ este fixată cîte o masă concentrată m=0,4 kg.

1) Să se deducă ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului.

2) Să se determine amplitudinea vibraţiilor forţate pentru ω= =64 rad/s, dacă $\frac{c}{c_{cr}}$=0,06.

5.31*. Un compresor cu piston (fig. 5.31) are greutatea totală G=5000 N, fiind aşezat pe fundaţie prin intermediul unui sistem cu arcuri elastice şi cu amortizare vîscoasă. Pistonul este pus în mişcare prin inter-

mediul unui mecanism bielă-manivelă avînd $n=1500$ rot/min. Lungimea manivelei este $r=10$ cm, iar lungimea bielei se consideră mare faţă de lungimea manivelei. Masa neechilibrată în mişcarea de translaţie (masa pistonului şi o parte a masei bielei) este $m_p=12$ kg. Elementele rotitoare ale compresorului se presupun perfect echilibrate. Amortizarea este caracterizată prin $\frac{c}{c_{cr}}=0{,}15$.

Să se determine constanta elastică a arcurilor în aşa fel ca forţa maximă transmisă fundaţiei să nu depăşească 20% din maximul forţei perturbatoare ce acţionează asupra compresorului. Să se calculeze, de asemenea, valoarea coeficientului de amortizare.

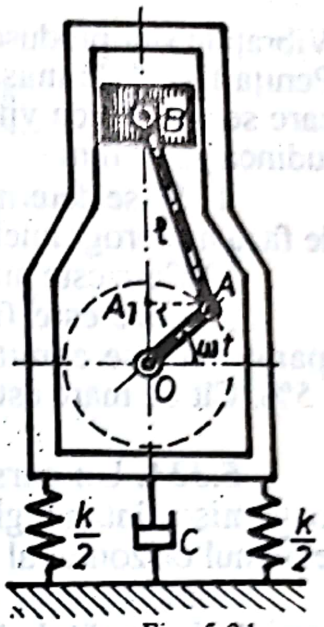


Fig. 5.31

5.32. În fig. 5.32 este reprezentată schema unui aparat seismeic folosit pentru măsurarea vibraţiilor. Caracteristicile aparatului sînt $m=0{,}25$ kg; $k=1$ N/mm; $c=22{,}36$ Ns/m. Carcasa aparatului se montează pe un corp (maşină, construcţie etc.) care vibrează armonic după legea $f=r\sin \omega t$

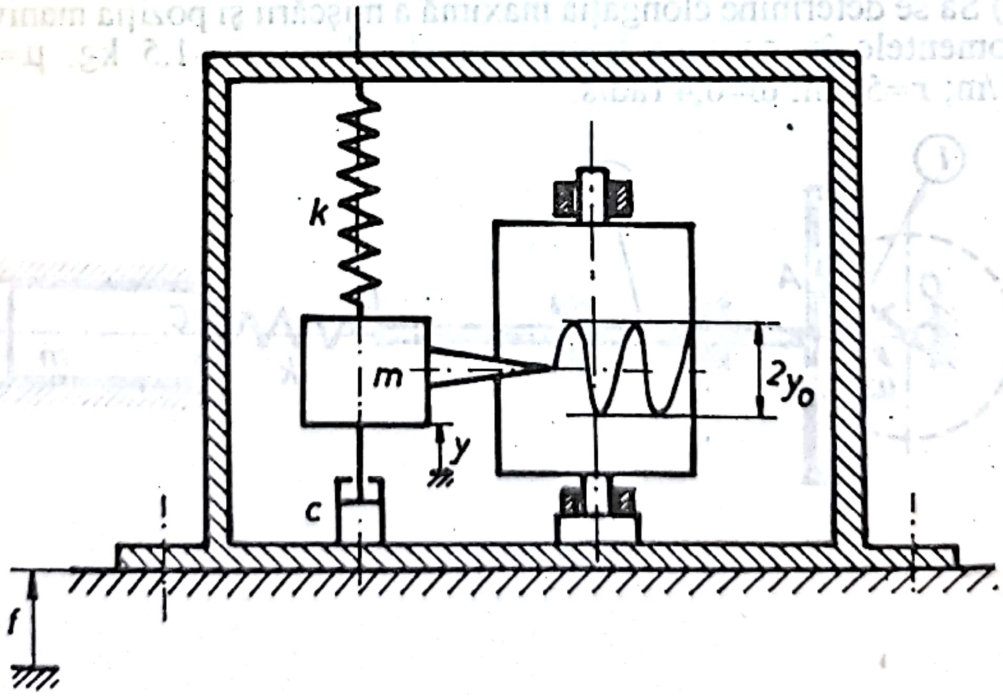


Fig. 5.32

Vibraţiile sînt produse de un motor electric avînd turaţia $n=1200$ rot/minut. Peniţa fixată de masa seismică m înregistrează pe suprafaţa tamburului, care se roteşte cu viteza unghiulară constantă, o sinusoidă avînd amplitudinea $y_0=7$ mm.

1) Să se determine amplitudinea r a vibraţiilor de măsurat şi eroarea de fază a vibrogramei înregistrate.

2) Care este amplitudinea x_0 a mişcării absolute a masei seismice?

3) Care este frecvenţa minimă la care se mai poate folosi acest aparat dacă se admite o eroare de măsurare a amplitudinii mişcării de ± 5%. Cît de mare este eroarea de fază la această frecvenţă?

5.33*. Un cursor de masă m, asimilabil cu un punct material, se poate mişca într-un ghidaj rectiliniu orizontal, coeficientul de frecare faţă de planul orizontal al ghidajului fiind μ.

Cursorul este antrenat cu ajutorul arcului BC, avînd constanta elastică k, capătul B al arcului fiind prins de extremitatea tijei 2 a mecanismului cu culisă oscilantă din fig. 5.33. Manivela 1 de lungime r a mecanismului se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. Presupunînd că mişcarea cursorului este continuă (nu există intervale de timp în care cursorul stă), se cere:

1) Să se studieze mişcarea periodică staţionară a cursorului, avînd perioada egală cu perioada de rotaţie a manivelei.

2) Să se determine elongaţia maximă a mişcării şi poziţia manivelei 1 în momentele în care se atinge aceasta dacă $m=1{,}5$ kg; $\mu=0{,}2$; $k=96$ N/m; $r=5$ cm; $\omega=6{,}4$ rad/s.

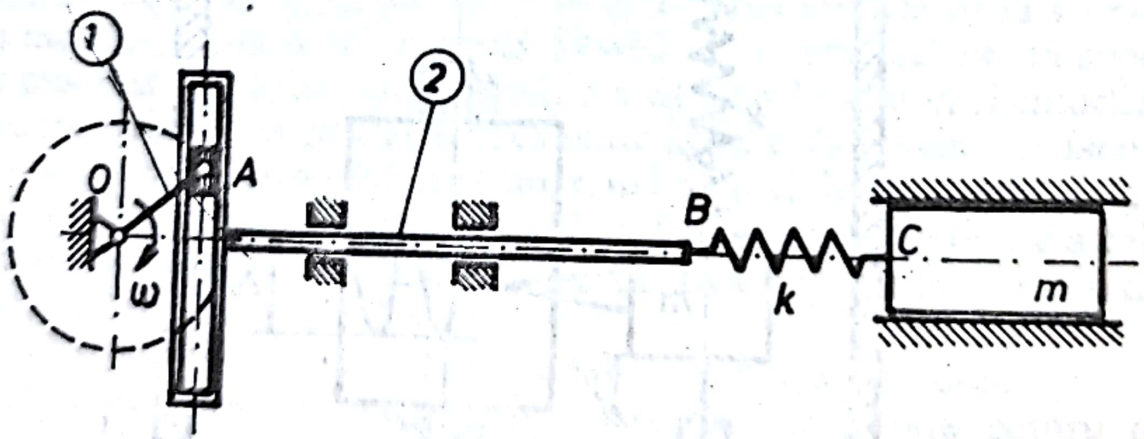


Fig. 5.33.

Scanned with OKEN Scanner

REZULTATE
INDICAȚII
REZOLVĂRI

Scanned with OKEN Scanner

1. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

1.1. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

1.1.

1) $$v_A = \sqrt{\frac{g x_B^2}{2 y_A}} = 2{,}55\,\text{m/s};$$

2) $$t_{AB} = \frac{x_B}{v_A} = 0{,}45\,\text{s};$$

3) $$\alpha \approx 60°.$$

1.2.

1) $\alpha = 60°$;

2) $t_1 = 3{,}74$ s; $t_2 = 54{,}52$ s.

1.3.

2) $$v_0 = \sqrt{\frac{g\left(a^2 + b^2\right)}{h}} = 56{,}464\,\text{m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) $$v_0 = \sqrt{\frac{g\left(a^2 + b^2\right)}{2b}} = 39{,}926\,\text{m/s}.$$

4) $$t_2 = \sqrt{\frac{b}{g}} = 3{,}193\,\text{s}; \qquad t_3 = \sqrt{\frac{2b}{g}} = 4{,}515\,\text{s}.$$

1.4.

1) $$d_{max} = 4\sqrt{(H-h)\left[\frac{v_0^2}{2g} - (H-h)\right]} = 8{,}096\,\text{m}.$$

2) $$H = h + \frac{v_0^2}{2g} = 6{,}597\,\text{m}; \qquad d_{max} = \frac{v_0^2}{g} = 10{,}194\,\text{m}.$$

1.5. $$v_1 v_2 \cos\alpha + v_2 v_3 \sin\alpha - v_1 v_3 = 0.$$

Dreapta pe care se află cele trei mobile are direcţie constantă, fiind paralelă cu dreapta ce trece prin vîrfurile celor trei viteze iniţiale.

1.6*

1) Ecuaţiile mişcării proiectilului, dacă se neglijează rezistenţa aerului sînt

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \tag{1}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t. \tag{2}$$

Prin eliminarea timpului din cele două ecuaţii, se obţine ecuaţia traiectoriei

$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\,\text{tg}\,\alpha, \tag{3}$$

care, se ştie, este o parabolă.

Proiectilul atinge ţinta, dacă coordonatele ei a şi b verifică ecuaţia parabolei:

$$b = -\frac{g}{2}\frac{a^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + a\,\text{tg}\,\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza acestei egalități se poate exprima viteza inițială necesară v_0 în funcție de unghiul α:

$$v_0 = a\sqrt{\frac{g}{2\cos\alpha\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha)}}. \qquad (4)$$

Evident, unghiul α trebuie să fie mai mare decît unghiul φ reprezentat în fig. I.6.1 și dat de relația $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Prin urmare, unghiul α poate avea valori între φ și $\frac{\pi}{2}$.

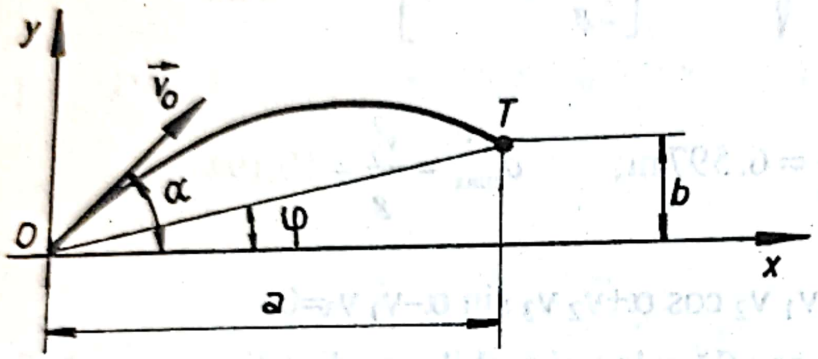


Fig. I.6.1

În continuare trebuie determinată valoarea unghiului α, din intervalul $\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru care viteza v_0 este minimă. Deoarece α intervine numai în numitorul expresiei de sub radical, este suficient să se analizeze numai funcția

$$f(\alpha) = \cos\alpha\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha). \qquad (5)$$

Viteza v_0 este minimă, dacă funcția $f(\alpha)$ este maximă.
Se calculează derivata lui $f(\alpha)$ în funcție de α

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \cos\alpha\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha) =$$

$$= a(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2b\sin\alpha\cos\alpha = a\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha,$$

și apoi se determină rădăcinile, cuprinse în intervalul $\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)$, ale ecuației $f'(\alpha) = 0$:

$$a\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha = 0. \qquad (6)$$

Din această ecuație rezultă $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{a}{b}$, ceea ce arată că $2\alpha > \frac{\pi}{2}$, respectiv $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

Împărţind ecuaţia (6) cu a, ea poate fi pusă sub forma $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\varphi \sin 2\alpha = 0$ sau $\cos(2\alpha - \varphi) = 0$, de unde rezultă $2\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2}$, respectiv

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

Se poate verifica uşor că pentru această valoare a unghiului α, funcţia $f(\alpha)$ este maximă şi în consecinţă viteza v_0 este minimă. Înlocuind valoarea găsită a unghiului α în relaţia (4), rezultă

$$v_{0\,min} = \sqrt{g\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)}. \tag{8}$$

Cu datele numerice ale problemei rezultă:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{52}{295} = 0{,}17627; \qquad \varphi = 0{,}1745 \text{ rad } (10°)$$

$$\alpha = \frac{0{,}1745}{2} + \frac{\pi}{4} = 0{,}8726 \text{ rad } (50°)$$

$$v_{0\,min} = \sqrt{9{,}81\left(\sqrt{295^2 + 52^2} + 52\right)} = 58{,}725 \text{ m/s}.$$

2) Se înlocuieşte în relaţia (4) $v_0 = nv_{0\,min} = n\sqrt{g\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)}$ şi se ajunge la următoarea ecuaţie în α:

$$n\sqrt{g\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} = a\sqrt{\frac{g}{2\cos\alpha\left(a\sin\alpha - b\cos\alpha\right)}}.$$

După calcule simple ecuaţia poate fi pusă sub forma

$$a\sin\alpha\cos\alpha - b\cos^2\alpha = \frac{a^2}{2n^2\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)}$$

sau

$$\sin 2\alpha - \frac{b}{a}\cos 2\alpha = \frac{a}{n^2\left(\sqrt{a^2 + b^2} + b\right)} + \frac{b}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în partea stîngă a egalității raportul $\frac{b}{a}$ cu tg φ, rezultă

$$\sin(2\alpha-\varphi)=\left[\frac{a}{n^2\left(\sqrt{a^2+b^2}+b\right)}+\frac{b}{a}\right]\cos\varphi,$$

unde

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Înlocuind valoarea lui cos φ și efectuînd calculele, ecuația devine

$$\sin(2\alpha-\varphi)=\frac{1}{n^2}\left[1+\left(n^2-1\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]. \qquad (9)$$

Dacă $n>1$, membrul drept al egalității (9) este subunitar și pentru α rezultă două valori:

$$\alpha_1=\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\left\{\frac{1}{n^2}\left[1+\left(n^2-1\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]\right\}, \qquad (10)$$

$$\alpha_2=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left\{\frac{1}{n^2}\left[1+\left(n^2-1\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Pentru $n=1$, $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}$, adică se regăsește pentru α valoarea dată de relația (7), corespunzătoare vitezei inițiale minime.

Cu datele numerice ale problemei rezultă

$$v_0=1{,}6\cdot 58{,}725=93{,}96 \text{ m/s},$$

$$\alpha_1=0{,}08725+0{,}25972=0{,}34697 \text{ rad } (19{,}88°);$$

$$\alpha_2=0{,}08725+\frac{\pi}{2}-0{,}25972=1{,}3983 \text{ rad } (80{,}12°).$$

Reprezentînd grafic v_0 în funcție de α [relația (4)] pentru $a=295$ m, $b=52$, se obține curba din fig. I.6.2.

Scanned with OKEN Scanner

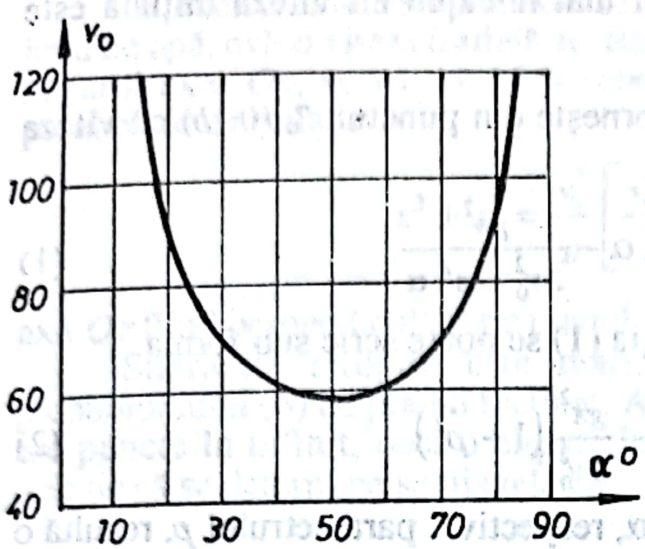


Fig. I.6.2

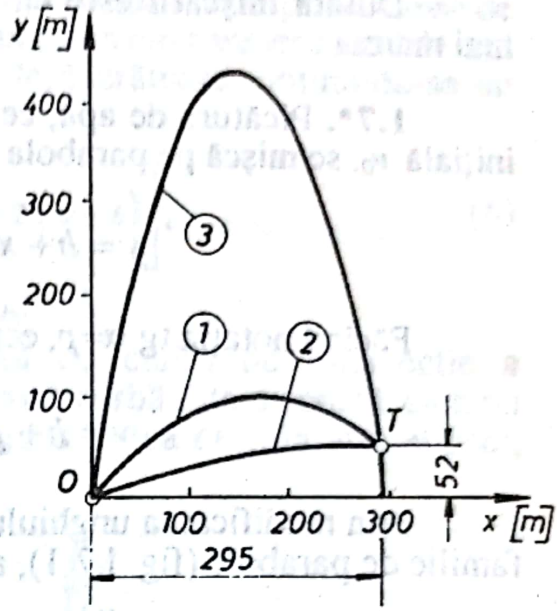


Fig. I.6.3

Se vede că există o viteză inițială minimă pentru care corespunde un unghi α bine determinat. Pentru orice viteză inițială v_0 diferită (mai mare) de cea minimă corespund două unghiuri α_1 și α_2 diferite.

În fig. I.6.3 s-au reprezentat traiectoriile proiectilului pentru viteza inițială minimă (curba 1) și pentru viteza inițială de 93,96 $\frac{m}{s}$ (curbele 2 și 3).

3) Timpul t în care proiectilul ajunge într-un punct de abscisă x se poate determina din relația (1):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}. \tag{12}$$

Astfel, durata mișcării pînă la țintă ($x=a$) în cazul vitezei inițiale minime este

$$t_1 = \frac{295}{58,725 \cdot \cos 0,8726} = 7,21 \text{ s}.$$

Dacă v_0=93,96 m/s, rezultă un timp t_2, pentru $\alpha=\alpha_1$ și un alt timp t_3 pentru $\alpha=\alpha_2$:

$$t_2 = \frac{295}{93,96 \cdot \cos 0,34697} = 3,34 \text{ s}; \qquad t_3 = \frac{295}{93,96 \cdot \cos 1,3983} = 18,30 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Durata mişcării este cu atît mai mică cu cît viteza iniţială este mai mare.

1.7*. Picătura de apă, ce porneşte din punctul P_0 $(0, h)$ cu viteza iniţială v_0, se mişcă pe parabola

$$y = h + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{1}$$

Făcînd notaţia $\operatorname{tg} \alpha = p$, ecuaţia (1) se poate scrie sub forma

$$y = h + px - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + p^2). \tag{2}$$

Prin modificarea unghiului α, respectiv a parametrului p, rezultă o familie de parabole (fig. I.7.1), a căror înfăşurătoare este tot o parabolă.

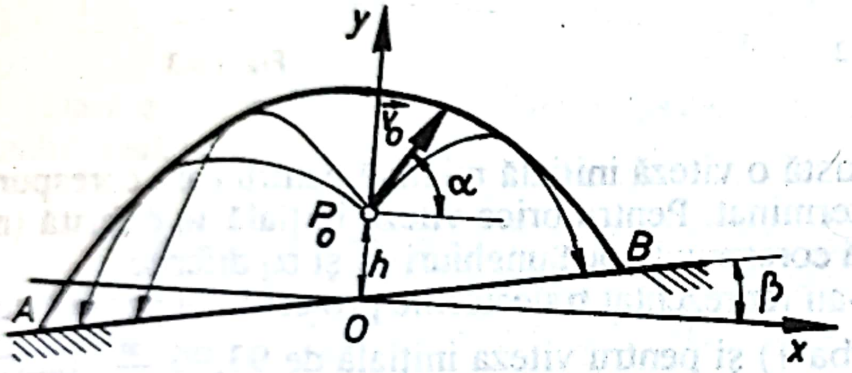


Fig. I.7.1.

Pentru a determina ecuaţia curbei înfăşurătoare, se derivează egalitatea (2) în raport cu parametrul p

$$x - \frac{gx^2}{2v_0^2} 2p = 0, \tag{3}$$

şi se elimină p din relaţiile (3) şi (2):

$$y - h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \tag{4}$$

Astfel s-a obţinut ecuaţia parabolei înfăşurătoare, care se mai poate scrie sub forma

$$x^2 = \frac{v_0^2}{g}\left[\frac{v_0^2}{g} - 2(y - h)\right]. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

În interiorul acestei parabole se găsesc punctele care pot fi atinse de jetul de apă, avînd viteza inițială v_0. Rotind țeava din care iese jetul de apă în jurul axei Oy, se va roti și parabola înfășurătoare, obținîndu-se un paraboloid de ecuație

$$x^2+z^2=\frac{v_0^2}{g}\left[\frac{v_0^2}{g}-2(y-h)\right], \tag{6}$$

axa Oz fiind perpendiculară pe planul xOy.

Suprafața stropită este mărginită de curba de intersecție a paraboloidului (6) cu planul înclinat. Această curbă este o conică, care nu are puncte la infinit, deci o elipsă. Pentru a putea calcula aria elipsei, trebuie să se determine semiaxele ei.

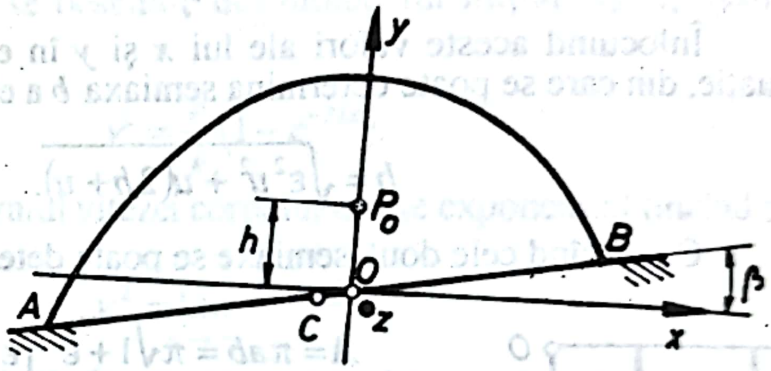


Fig. I.7.2.

Centrul C al elipsei se află în planul xOy. Pentru a determina coordonatele centrului și semiaxa $CB=CA$ intersectăm paraboloidul cu dreapta AB (fig. I.7.2), avînd ecuațiile

$$y=\operatorname{tg}\beta x, \quad z=0. \tag{7}$$

Pentru a simplifica scrierea, vom folosi notațiile:

$$\frac{v_0^2}{g}=u,\ \operatorname{tg}\beta=\varepsilon. \tag{8}$$

Înlocuind valorile lui y și z din (7) în (6), se obține ecuația în x:

$$x^2+2\varepsilon u x-u(2h+u)=0. \tag{9}$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt coordonatele punctelor A și B:

$$x_A=-\varepsilon u-\sqrt{\varepsilon^2u^2+u(2h+u)} \tag{10}$$

$$x_B=-\varepsilon u+\sqrt{\varepsilon^2u^2+u(2h+u)} \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem determina imediat şi coordonatele punctului C.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = -\varepsilon u \tag{12}$$

$$y_C = \varepsilon x_C = -\varepsilon^2 u. \tag{13}$$

Semiaxa $CA = a$ este

$$a = \frac{x_B - x_C}{\cos\beta} = \sqrt{1+\varepsilon^2}\,\sqrt{\varepsilon^2 u^2 + u(2h+u)}. \tag{14}$$

Pentru a determina cealaltă semiaxă a elipsei, intersectăm paraboloidul cu o dreaptă perpendiculară pe planul hîrtiei, ce trece prin punctul C, avînd ecuaţiile

$$x = x_C = -\varepsilon u, \quad y = y_C = -\varepsilon^2 u. \tag{15}$$

Înlocuind aceste valori ale lui x şi y în ecuaţia (6), se obţine o ecuaţie, din care se poate determina semiaxa b a elipsei:

$$b = \sqrt{\varepsilon^2 u^2 + u(2h+u)}. \tag{16}$$

Cunoscînd cele două semiaxe se poate determina aria elipsei

$$A = \pi ab = \pi\sqrt{1+\varepsilon^2}\left[\varepsilon^2 u^2 + u(2h+u)\right], \tag{17}$$

sau ţinînd seama de notaţiile (8)

$$A = \pi\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}\left(1+\operatorname{tg}^2\beta + \frac{2gh}{v_0^2}\right). \tag{18}$$

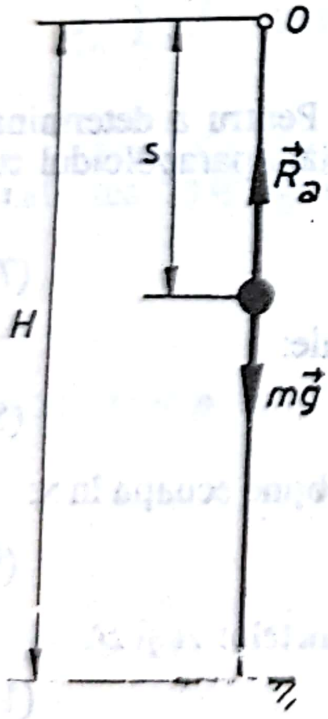


Fig. 1.8.1

1.8*. Ecuaţia diferenţială a mişcării corpului este

$$ma = mg - kmv^2, \tag{1}$$

unde

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\dot{s} = \frac{dv}{ds}v. \tag{2}$$

Astfel, ecuaţia (1) devine

$$v\frac{dv}{ds} = g - kv^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, separînd variabilele:

$$\frac{v\,\mathrm{d}\,v}{g-kv^2}=\mathrm{d}\,s. \tag{3}$$

Integrînd ecuaţia (3) rezultă

$$\ln\,(g-kv^2)=-2\,ks+C. \tag{4}$$

Punînd condiţia că pentru $s=s_0$, $v=v_0$, se obţine $C=\ln\,(g-kv_0^2)+2\,ks_0$. Înlocuind valoarea constantei de integrare în relaţia (4), se poate determina viteza în funcţie de s:

$$v^2=\frac{g}{k}+\left(v_0^2-\frac{g}{k}\right)e^{-2k(s-s_0)}. \tag{5}$$

Dacă paraşuta se deschide din momentul iniţial, $v_0=0$, $s_0=0$, iar expresia (5) devine

$$v^2=\frac{g}{k}\left(1-e^{-2ks}\right). \tag{5'}$$

În acest caz pătratul vitezei corpului creşte exponenţial tinzînd către valoarea

$$v_1^2=\lim_{s\to\infty}v^2=\frac{g}{k}. \tag{6}$$

Deci, dacă înălţimea H este foarte mare, corpul ajunge pe pămînt cu viteza v_l, dată de expresia (6).

Viteza limită v_l se poate determina şi direct pe baza ecuaţiei (1) din condiţia $a=0$.

2) Dacă căderea se face fără paraşută, viteza în funcţie de spaţiul parcurs ($v_0=0$) este

$$v=\sqrt{2\,gs}. \tag{7}$$

Din condiţia ca pentru $s=h$, $v=v_l=\sqrt{\frac{g}{k}}$, se obţine

$$h=\frac{1}{2k}. \tag{8}$$

Menţionăm că în acest caz pătratul vitezei

$$v^2=2gs \tag{9}$$

variază liniar în funcţie de s.

Scanned with OKEN Scanner

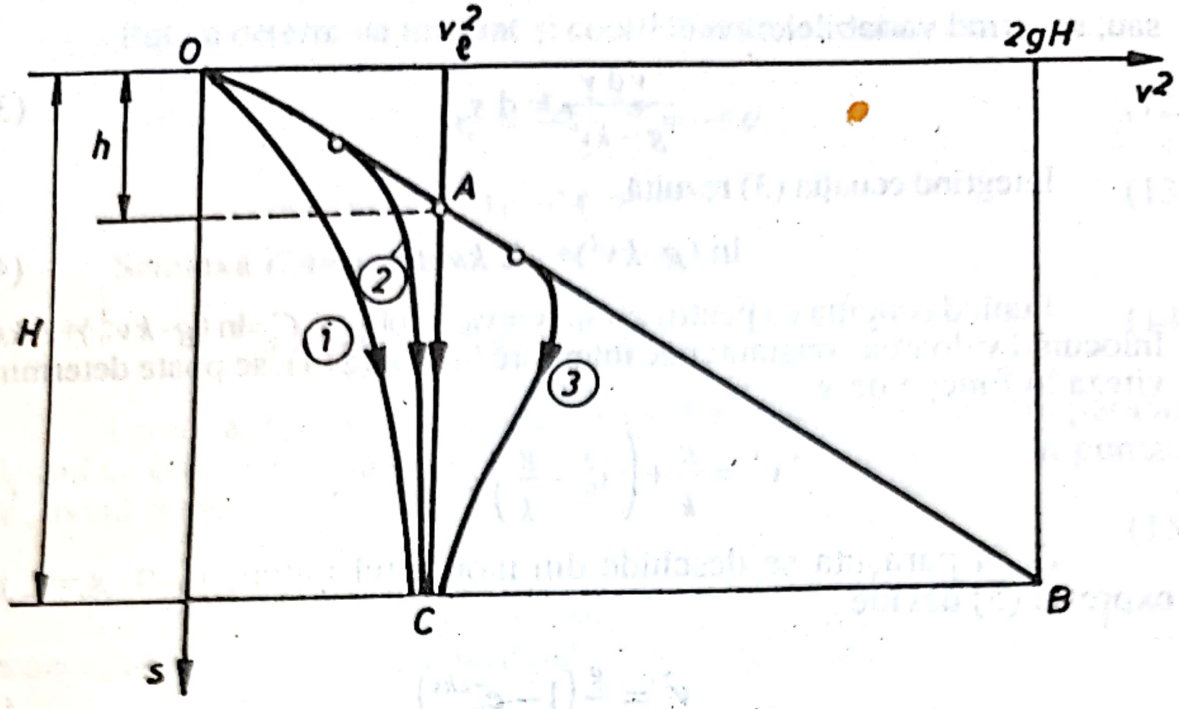


Fig. I.8.2

3) După parcurgerea spațiului $s_0 = \frac{H}{n}$ fără paraşută, viteza corpului este $v_0 = \sqrt{2g\frac{H}{n}}$.

Viteza corpului în continuare variază conform legii (5)

$$v^2 = v_l^2 + \left(v_0^2 - v_l^2\right) e^{-2k(s-s_0)}. \qquad (10)$$

În fig. I.8.2 s-a reprezentat v^2 în funcție de s pe baza relațiilor (9) (dreapta OB), (5') (curba 1) şi (10) (curbele 2 şi 3). Dacă paraşuta nu se deschide. mişcarea se face conform dreptei OB şi corpul ajunge pe pămînt cu viteza $\sqrt{2\,gH}$.

Dacă paraşuta se deschide de la început, pătratul vitezei variază conform curbei (1), viteza finală fiind mai mică decît v_l.

Dacă paraşuta se deschide numai după ce s-a parcurs un spațiu $\frac{H}{n}$, cînd viteza corpului este $v_0 = \sqrt{2g\frac{H}{n}}$, sînt posibile două cazuri: a) dacă $v_0 < v_l$ (curba 2 din fig. I.8.2), viteza finală este mai mică decît v_l şi b) dacă $v_0 > v_l$ (curba 3) viteza finală este mai mare decît v_l.

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea vitezei finale se obține (pentru ambele cazuri) din relația (10), făcînd $s=H$:

$$v_f^2 = v_l^2 + \left(\frac{2gH}{n} - v_l^2\right) e^{-2k\frac{n-1}{n}H}. \qquad (11)$$

Dacă înălțimea H este suficient de mare, viteza finală în ambele cazuri este $v_f \approx v_l$.

4) Condiția ca mișcarea corpului să devină uniformă este ca parașuta să se deschidă în momentul în care $v_0=v_l$ (punctul A din fig. I.8.2), adică trebuie să avem $\frac{H}{n}=h$, de unde

$$n=\frac{H}{h}=2kH. \qquad (12)$$

În acest caz pătratul vitezei la început variază liniar (segmentul OA), apoi devine constant (segmentul AC), viteza finală fiind egală cu v_l.

1.9.

1) $v=\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$, pentru $h=300$ km, $v=7{,}725$ km/s.

2) $T=2\pi\frac{(R+h)^{3/2}}{\sqrt{gR^2}}$, pentru $h=300$ km, $T=1{,}5069$ ore.

3) $h=35\,851{,}93$ km, $v=3{,}07$ km/s.

1.10*. Se știe că traiectoria satelitului, care se mișcă în jurul Pămîntului, este o elipsă al cărei focar coincide cu centrul Pămîntului (fig. I. 10.1.). S-a notat cu P perigeul și cu A apogeul traiectoriei. Perioada de revoluție este dată de relația

$$T^2=\frac{4\pi^2 a^3}{f m_P}, \qquad (1)$$

unde a reprezintă semiaxa mare a elipsei. Pe baza figurii I.10.1 se poate scrie

$$2a=h_a+2R+h_p,$$

Scanned with OKEN Scanner

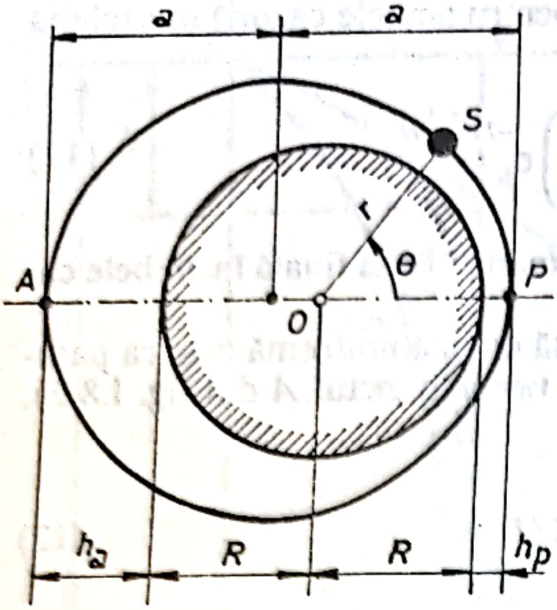


Fig. I.10.1

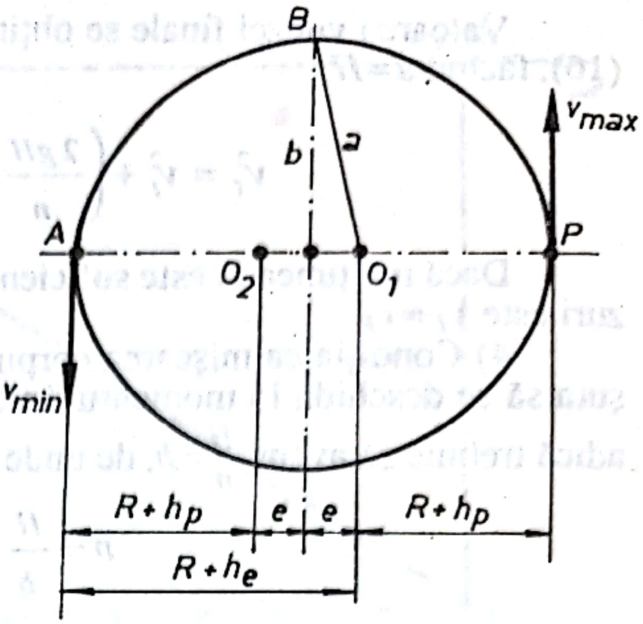


Fig. I.10.2

de unde

$$a = \frac{h_a + 2R + h_p}{2} = \frac{946 + 2 \cdot 6370 + 229}{2} = 6957{,}5 \text{ km}.$$

Din relaţia (1) rezultă

$$m_P = \frac{4\pi^2 a^3}{fT^2} = \frac{4\pi^2 \left(6957{,}5 \cdot 10^3\right)^3}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \left(96{,}2 \cdot 60\right)^2} \approx 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

2) Dacă axa origine coincide cu *OP*, ecuaţia traiectoriei în coordonate polare este

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \tag{2}$$

unde

$$p = \frac{c^2}{f m_P} = \frac{b^2}{a} \tag{3}$$

c =dublul vitezei areolare,
b =semiaxa mică a elipsei,
ε =excentricitatea elipsei.

Pe baza figurii I.10.2 rezultă $AO_1=AO_2+O_2O_1$, adică

$$R+h_a=R+h_p+2e,$$

de unde

$$e=\frac{h_a-h_p}{2}. \tag{4}$$

Cunoscînd distanţa e dintre focarul şi centrul elipsei, se poate determina excentricitatea

$$\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{h_a-h_p}{h_a+2R+h_p} \tag{5}$$

şi parametrul p:

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-e^2}{a}=\frac{\dfrac{(h_a+2R+h_p)^2}{2^2}-\dfrac{(h_a-h_p)^2}{2^2}}{\dfrac{h_a+2R+h_p}{2}}= \tag{6}$$

$$=2\frac{(h_a+R)(h_p+R)}{h_a+2R+h_p}.$$

Astfel, constanta c (dublul vitezei areolare) se poate exprima din relaţia (3) în funcţie de mărimi cunoscute:

$$c=\sqrt{fm_p p}=\sqrt{gR^2 p}=R\sqrt{2g\frac{(h_a+R)(h_p+R)}{h_a+2R+h_p}}. \tag{7}$$

Pe de altă parte, viteza areolară fiind $\Omega=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}r\cdot r\dot{\theta}=\frac{1}{2}rv_\theta$, $c=2\Omega=r\cdot v_\theta$, unde v_θ este componenta transversală a vitezei satelitului. În apogeu şi în perigeu viteza radială este nulă (r trece printr-o valoare maximă sau minimă) aşa încît vitezele extreme coincid cu vitezele transversale din punctele respective. Astfel, se pot scrie relaţiile

$$c=r_{min}\,v_{max}=r_{max}\,v_{min};\quad r_{min}=R+h_p,\ r_{max}=R+h_a, \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$v_{min}=\frac{c}{r_{max}}=R\sqrt{\frac{2g\left(h_p+R\right)}{\left(h_a+R\right)\left(h_a+2R+h_p\right)}}. \tag{9}$$

$$v_{max}=\frac{c}{r_{min}}=R\sqrt{\frac{2g\left(h_a+R\right)}{\left(h_p+R\right)\left(h_a+2R+h_p\right)}}. \tag{10}$$

Cu datele numerice din enunț se obțin pentru aceste viteze următoarele valori: $v_{min}=7{,}1929$ km/s; $v_{max}=7{,}9745$ km/s.

1.11. $$T_2=T_1\left(\frac{h_{a2}+2R+h_{p2}}{h_{a1}+2R+h_{p1}}\right)^{\frac{3}{2}}=157{,}4 \text{ minute.}$$

1.12*.

1) Ținînd seama de forța de atracție newtoniană, traiectoria este elipsa care intersectează suprafața Pămîntului în punctul D (fig. I.12.1). În acest caz bătaia aruncării b_e este arcul de cerc $\overset{\frown}{BD}$:

$$b_e=\overset{\frown}{BD}=2R\psi_0, \tag{1}$$

unde ψ_0 reprezintă unghiul dintre direcția OB și axa de simetrie a elipsei ($\psi_0=\pi-\theta_0$).

Pentru determinarea unghiului θ_0 se pleacă de la ecuația elipsei în coordonate polare

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}. \tag{2}$$

Din condiția că pentru $\theta=\theta_0$, $r=r_0=R$ se obține

$$\cos\theta_0=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{R}-1\right)$$

și

$$\sin\theta_0=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\left[\left(\varepsilon^2-1\right)+\frac{p}{R}\left(2-\frac{p}{R}\right)\right]}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

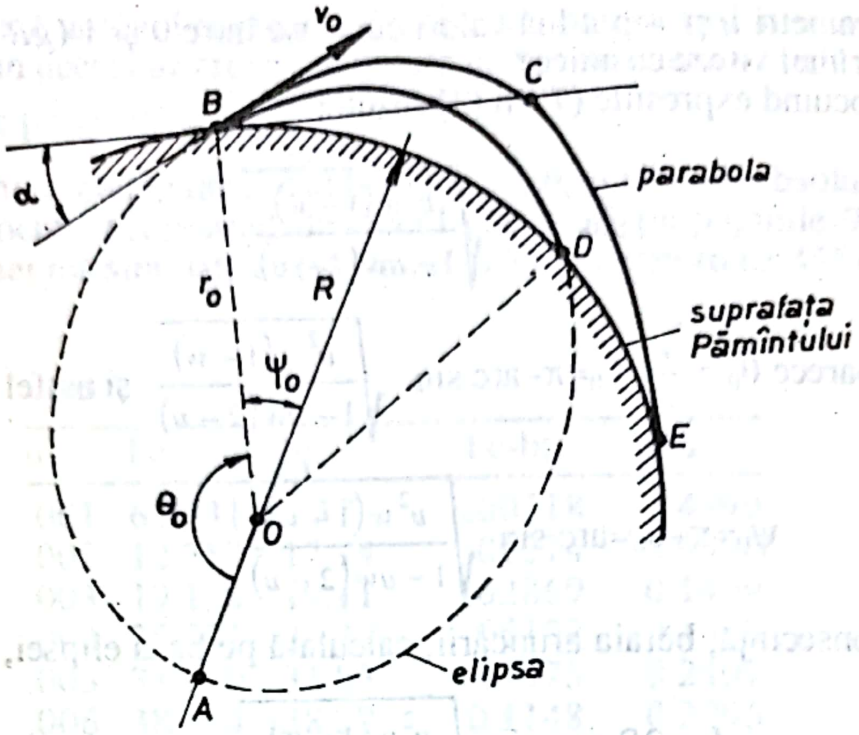


Fig. 1.12.1

Se știe că

$$p=\frac{c^2}{K},\ \text{unde}\ K=f\,m_P=gR^2,\ \text{iar}\ c=r^2\dot{\theta}=rv_\theta=r_0v_{\theta_0}=Rv_0\cos\alpha.$$

Astfel

$$\frac{p}{R}=\frac{c^2}{KR}=\frac{R^2v_0^2\cos^2\alpha}{gR^2R}=\frac{v_0^2}{gR}\cos^2\alpha. \tag{4}$$

Excentricitatea ε se calculează cu relația

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{c^2}{K^2}\left(v_0^2-\frac{2K}{R}\right)}=\sqrt{1+\frac{c^2}{KR}\left(\frac{v_0^2}{gR}-2\right)}. \tag{5}$$

Folosind notațiile

$$u=\frac{v_0^2}{gR}\ \text{și}\ w=\cos^2\alpha, \tag{6}$$

relațiile (4) și (5) devin:

$$\frac{p}{R}=uw,\qquad \varepsilon=\sqrt{1+uw(u-2)}. \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Parametri u şi w pot lua valori cuprinse între 0 şi 1 (gR reprezintă pătratul primei viteze cosmice).

Înlocuind expresiile (7) în (3) rezultă

$$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}}.$$

Deoarece $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}}$ şi astfel

$$\psi_0 = \pi - \theta_0 = \arcsin\sqrt{\frac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}}. \tag{8}$$

În consecinţă, bătaia aruncării, calculată pe baza elipsei, este

$$b_e = 2R \arcsin\sqrt{\frac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}}. \tag{9}$$

Bătaia aruncării calculată pe baza parabolei este lungimea segmentului dintre punctele B şi C (fig. I. 12.1.):

$$b_p = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha = 2R\frac{v_0^2}{gR}\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 2Ru\sqrt{w(1-w)}. \tag{10}$$

Eroarea absolută la determinarea bătăii este

$$\varepsilon = b_e - b_p = 2R\left(\arcsin\sqrt{\frac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}} - u\sqrt{w(1-w)}\right), \tag{11}$$

iar eroarea relativă procentuală

$$\delta\% = \frac{b_e - b_p}{b_e}100 = \left(1 - \frac{u\sqrt{w(1-w)}}{\arcsin\sqrt{\frac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}}}\right)100. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă unghiul α are o valoare dată, parametrul $w=\cos^2\alpha$ este constant şi în acest caz eroarea depinde numai de viteza iniţială v_0, respectiv de parametrul $u=\frac{v_0^2}{gR}$.

Pentru calculul numeric al bătăilor b_e, b_p şi al erorii absolute şi relative s-a întocmit programul de calcul prezentat pe paginile 95–97. În tabelul de mai jos sînt date cîteva valori calculate pentru $\alpha=45°$ ($w=0{,}5$).

w=0.5

u	be	bp	be-bp	e%
.001	6.3731	6.37	.00318	.04999
.002	12.752	12.74	.01274	.09996
.003	19.138	19.11	.02869	0.1499
.004	25.531	25.48	.05102	0.1998
.005	31.929	31.85	.07975	0.2497
.006	38.334	38.22	0.1148	0.2996
.007	44.746	44.59	0.1564	0.3495
.008	51.164	50.96	0.2043	0.3994
.009	57.588	57.33	0.2587	0.4493
.01	64.019	63.7	0.3195	0.4991

w=0.5

u	be	bp	be-bp	e%
.02	128.68	127.4	1.2824	0.9966
.03	193.99	191.1	2.8951	1.4923
.04	259.96	254.8	5.1639	1.9863
.05	326.59	318.5	8.0951	2.4786
.06	393.89	382.2	11.695	2.9690
.07	461.87	445.9	15.970	3.4577
.08	530.52	509.6	20.926	3.9444
.09	599.87	573.3	26.570	4.4293
0.1	669.90	637	32.908	4.9123

```
10 REM
20 REM P1. 12
30 REM
40 DIM b $ (5, 6)
50 DIM a (4,50)
```


Scanned with OKEN Scanner

```
60 LET R=6370
67 DIM t $ (2,30)
68 LET t $ (1)=" u be bp
be-bp e%"
69 LET t $ (2)=" w be bp
be-bp e%
70 INPUT " umin="; umin; " umax=";
umax;" upas="; upas
75 IF umin=umax THEN GO TO 370
80 LET n=(umax–umin) / upas+1.5
98 LET w=.5: LPRINT "w="; w
100 LET i=1
110 LET u=umin
120 REM
130 GO SUB 1000
200 LET i=i+1
210 LET u=u+upas
220 IF i < =n THEN GO TO 120
230 REM
250 LET u=umin
255 LPRINT: LPRINT t $ (1): LPRI
NT " "
260 FOR i=1 TO n
270 LET b $ (1)=STR $ u
275 FOR j=1 TO 4
280 LET b $ (j+1)= Str $ a (j, i)
290 NEXT j
300 LPRINT b $ (1.1 TO 5); b $ (2); "
"; b $ (3); " "; b $ (4); " "; b $ (5)
305 LET u=u+upas
310 NEXT i
330 GO TO 70
370 INPUT " wmin="; wmin; " wmax=";
wmax;" wpas="; wpas
380 LET n=(wmax–wmin) / wpas+1.5
398 LET u=.01: LPRINT "u="; u
400 LET i=1
410 LET w=wmin
420 REM
```


Scanned with OKEN Scanner

```
430 GO SUB 1000
500 LET i=i+1
500 LET w=w+wpas
520 IF i <=n THEN GO TO 420
530 REM
550 LET w=wmin
555 LPRINT: LPRINT t $ (2): LPRI
NT "
"
560 FOR i=1 TO n
570 LET b $ (i)=STR $ w
575 FOR j=1 TO 4
580 LET b $ (j+i)=STR $ a (j, i)
590 NEXT j
600 LPRINT b $ (1, 1 TO 5); b $ (2); "
"; b $ (3); " "; b $ (4); " "; b $ (5)
605 LET w=w+wpas
610 NEXT i
630 GO TO 370
1000 LET be=2* R* ASN (SQR (u* u* w*
(1–w) / (1–u* w* (2–u))))
1010 LET bp=2*R*u *SQR (w* (1–w))
1020 LET a (1, i)=be: LET a (2, i)=b
p
1030 LET a (3, i)= be–bp
1040 Let a (4, i)=a (3, i) *100/be
1050 RETURN
```

Pe baza acestor valori s-au construit diagramele din fig. I.12.2. Se vede că o dată cu creşterea vitezei iniţiale creşte atît eroarea absolută, cît şi cea relativă. Pentru v_0=500 m/s, $u=\left(\frac{500}{7905}\right)^2=0,004$, eroarea relativă este de 0,2%, ceea ce înseamnă o abatere de 51 m faţă de valoarea exactă a bătăii b_e=25.531 m. Pentru v_0=790,5 m/s, u=0,01, eroarea relativă este de 0,5%, iar cea absolută 319,5 m faţă de 64.019 m. Eroarea relativă devine 1% pentru $u \approx 0,02$, respectiv pentru viteza iniţială $v_0 \approx 1118$ m/s.

3. Dacă viteza iniţială are o valoare dată, parametrul u devine constant şi variază numai $w=\cos^2 \alpha$. Programul de calcul anexat cuprinde

Scanned with OKEN Scanner

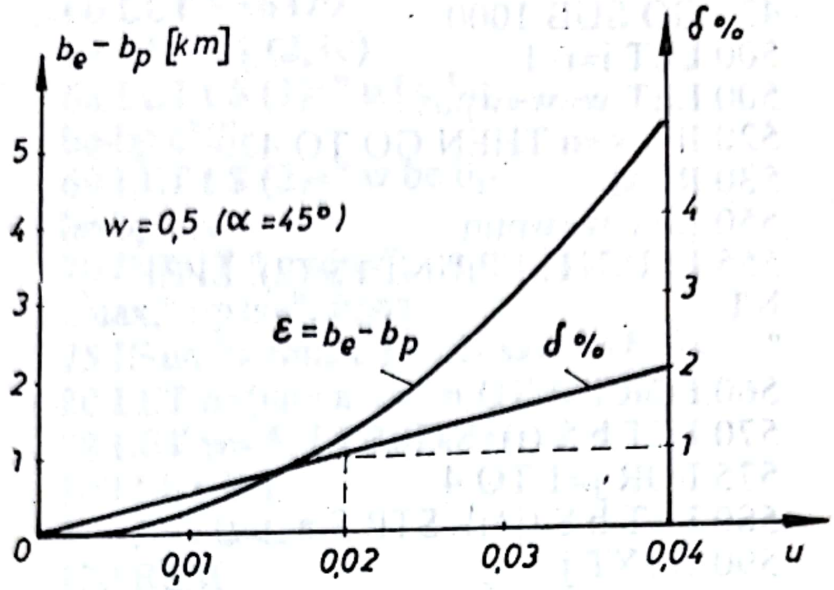


Fig. I.12.2.

şi cazul acesta. Cîteva valori calculate pentru v_0=790,5 m/s (u=0,01) sînt date în tabelul următor:

u=.01

w	be	bp	be-bp	e%
.05	27.780	27.766	.01384	.04984
0.1	38.258	38.22	.03814	.09969
0.15	45.559	45.490	.06814	0.1495
0.2	51.061	50.96	0.1018	0.1994
0.25	55.303	55.165	0.1379	0.2493
0.3	58.557	58.382	0.1752	0.2992
0.35	60.978	60.765	0.2129	0.3492
0.4	62.663	62.412	0.2501	0.3991
0.45	63.666	63.380	0.2859	0.4491
0.5	64.019	63.7	0.3195	0.4991
0.55	63.730	63.380	0.3499	0.5491
0.6	62.789	62.412	0.3762	0.5991
0.65	61.163	60.765	0.3970	0.6492
0.7	58.793	58.382	0.4111	0.6992
0.75	55.582	55.165	0.4165	0.7493
0.8	51.370	50.96	0.4106	0.7994
0.85	45.880	45.490	0.3897	0.8495
0.9	38.566	38.22	0.3469	0.8996
0.95	28.032	27.766	0.2662	0.9498

Scanned with OKEN Scanner

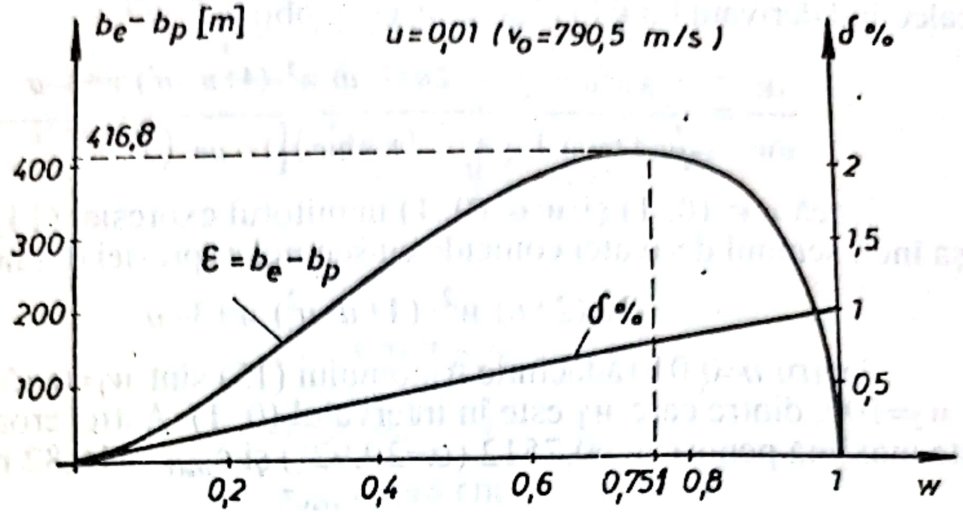


Fig. I.12.3

Şi în acest caz s-a reprezentat grafic eroarea absolută şi cea relativă în funcţie de w (fig. I.12.3).

Eroarea relativă creşte odată cu w. În expresia (12) a erorii relative apare fracţia

$$f = \frac{u\sqrt{w(1-w)}}{\arcsin\sqrt{\dfrac{u^2 w(1-w)}{1-uw(2-u)}}}. \tag{13}$$

Pentru $w=0\left(\alpha=\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $w=1$ ($\alpha=0$) la această fracţie rezultă o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$. Limitele fracţiei, care se pot calcula de exemplu cu regula lui l'Hospital, sînt

$$\lim_{w\to 0} f=1, \qquad \lim_{w\to 1} f=1-u=0{,}99.$$

Rezultă că pentru $w\to 0$ eroarea relativă tinde către 0, iar pentru $w\to 1$, eroarea tinde către 1%. Deci, într-adevăr pentru v_0 =790,5% eroarea relativă nu depăşeşte 1%.

Din diagramă se vede că eroarea absolută prezintă un maxim. Cu ajutorul programului de calcul întocmit valoarea maximă poate fi determinată cu precizia dorită. Însă, existenţa ei poate fi dovedită şi valoarea poate fi calculată şi cu ajutorul derivatei.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd în expresia (11) a erorii u ca un parametru constant şi calculînd derivata lui ε în raport cu w, se obţine

$$\frac{d\varepsilon}{dw}=\frac{Ru^2w}{\sqrt{w(1-w)}}\cdot\frac{2u(2-u)\,w^2-(4+u-u^2)\,w+3-u}{(1-uw)\left[1-uw(2-u)\right]}. \tag{14}$$

Dacă $u\in(0,1)$ şi $w\in(0,1)$ numitorul expresiei (14) este pozitiv aşa încît semnul derivatei coincide cu semnul expresiei din numărător:

$$2u(2+u)\,w^2-(4+u-u^2)\,w+3-u. \tag{15}$$

Pentru $u=0{,}01$ rădăcinile trinomului (15) sînt $w_1=0{,}7512$ ($\approx 0{,}751$) şi $w_2=100$, dintre care w_1 este în intervalul (0, 1). Astfel eroarea absolută este maximă pentru $w=0{,}7512$ ($\alpha=29{,}92°$) şi $\varepsilon_{max}=416{,}82$ m.

Observaţie

Deoarece unghiul ψ_0, ce se calculează cu relaţia (8), este mic, se poate face aproximaţia

$$\psi_0=\arcsin\sqrt{\frac{u^2w(1-w)}{1-uw(2-u)}}\approx\sqrt{\frac{u^2w(1-w)}{1-uw(2-u)}}, \tag{16}$$

cu ajutorul căreia toate relaţiile de calcul se simplifică foarte mult. Astfel, relaţia (12) devine

$$\delta\,\%=[1-\sqrt{1-uw(2-u)}]\,100. \tag{17}$$

1.2. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

1.13.

1) $$x=g\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}\cdot\frac{t^2}{2};$$

2) $$V_B=\sqrt{2gd\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos\varphi\cos(\alpha-\theta)}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) $$t_{AB}=\sqrt{\frac{2d}{g}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha-\theta)\cos(\theta+\varphi)}}.$$

4) $\theta=\dfrac{\alpha-\varphi}{2}$; $$t_{ABmin}=\sqrt{\frac{2d}{g}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos^2\frac{\alpha+\varphi}{2}}}.$$

1.14.

1) $v_B=5{,}267$ m/s;

2) $t_{AB}=0{,}759$ s;

3) $x_{max}=9{,}48$ cm.

1.15*.

1) Forţele care acţionează asupra cutiei sînt greutatea $\vec{G}$, reacţiunea normală $\vec{N}$ a planului înclinat şi forţa de frecare $\vec{T}$ de mărime μN.

Conform legii lui Newton

$$m\vec{a}_1=\vec{G}+\vec{N}+\vec{T}$$

Se proiectează această ecuaţie vectorială pe direcţia mişcării şi pe o direcţie perpendiculară pe aceasta

$$ma_1=G\sin\alpha-T,\quad 0=N-G\cos\alpha.$$

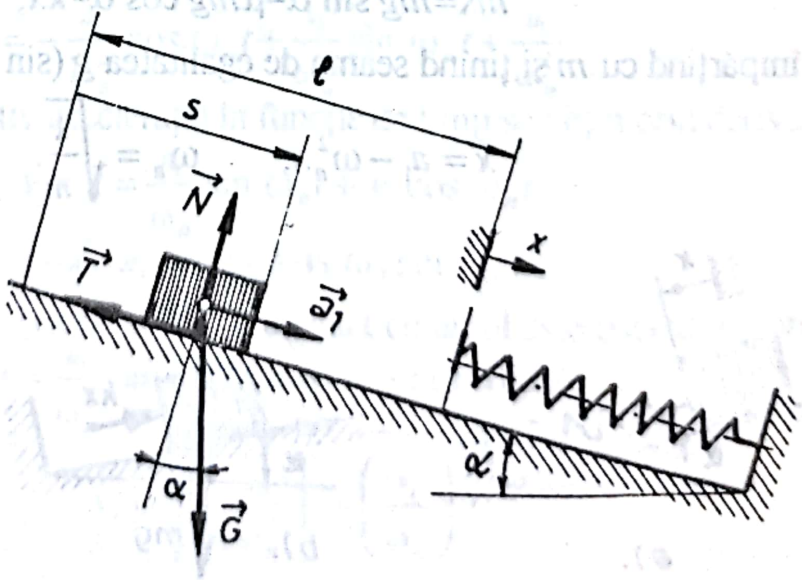


Fig. 1.15.1.

Din ecuaţia a doua se obţine $N=G\cos$; rezultă că $T=\mu N=\mu G\cdot$ $\cdot\cos\alpha$, cu ajutorul căreia prima ecuaţie devine

$$ma_1=G\sin\alpha-\mu G\cos\alpha.$$

Din aceasta ($G=mg$) rezultă

$$a_1=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=9{,}81\ (\sin 20°-0{,}23\cos 20°)=1{,}235\ \text{m/s}^2.$$

Acceleraţia fiind constantă, mişcarea cutiei pe planul înclinat este uniform accelerată. Spaţiul parcurs şi viteza după t secunde sînt

$$s=\frac{a_1t^2}{2},\qquad v=a_1t. \tag{1}$$

Timpul t_1 după care cutia ajunge în dreptul arcului ($s=l$) este

$$t_1=\sqrt{\frac{2l}{a_1}}=\sqrt{\frac{2\cdot 2{,}4}{1{,}235}}=1{,}97\ \text{s},$$

iar viteza v_1 în acest moment are valoarea

$$v_1=a_1t_1=a_1\sqrt{\frac{2l}{a_1}}=\sqrt{2la_1}=\sqrt{2\cdot 2{,}4\cdot 1{,}235}=2{,}435\ \text{m/s}.$$

2) Din momentul în care cutia intră în contact cu arcul, apare şi forţa elastică a acestuia (fig. I. 15.2), aşa încît ecuaţia diferenţială a mişcării devine

$$m\ddot{x}=mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha-kx,$$

sau împărţind cu m şi ţinînd seama de egalitatea $g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=a_1$,

$$\ddot{x}=a_1-\omega_n^2x,\qquad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2}$$

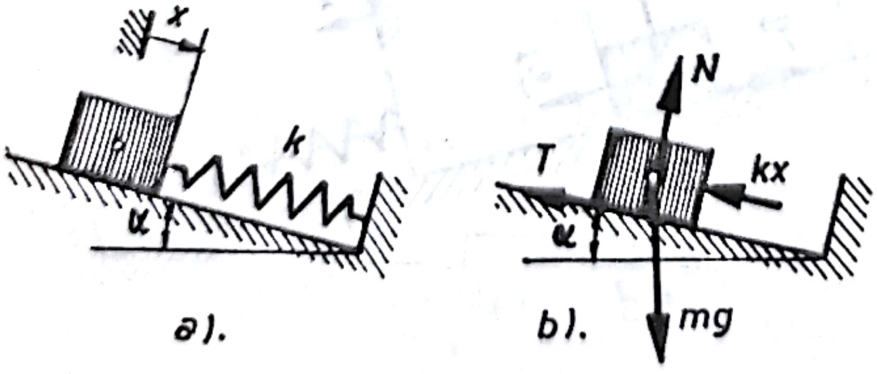


Fig. I.15.2

Ecuaţia aceasta arată că acceleraţia cutiei în contact cu arcul scade pînă la oprirea acesteia (fig. I. 15.3). Ea se anulează pentru $x=\frac{a_1}{\omega_n^2}$.

Trebuie să se determine constanta elastică k a arcului astfel încît în momentul în care cutia se opreşte ($x=x_m$) acceleraţia ei să nu fie mai mică decît $-4g$.

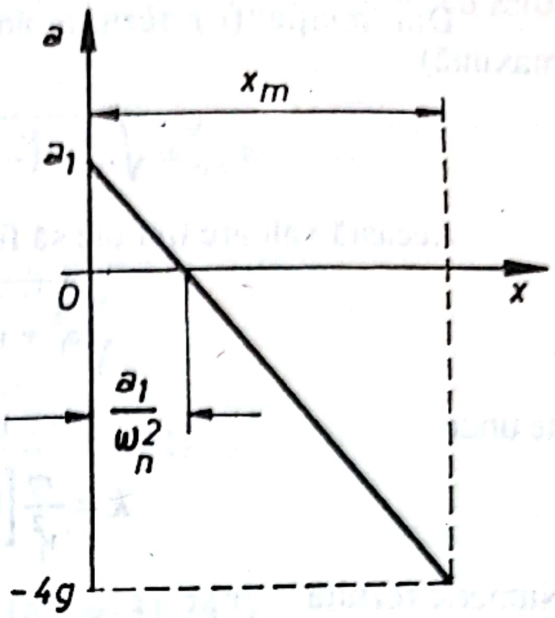


Fig. I.15.3

Ecuaţia (2) se poate scrie sub forma

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=a_1. \qquad (3)$$

de unde se vede că este o ecuaţie diferenţială liniară, neomogenă cu coeficienţi constanţi.

Legea mişcării cutiei. soluţia ecuaţiei diferenţiale (3), este de forma

$$x=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t+\frac{a_1}{\omega_n^2}.$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condiţiile iniţiale:

$$\text{la } t=0, \quad x=0, \quad \dot{x}=v_1.$$

Rezultă $C_1=-\frac{a_1}{\omega_n^2}$, $C_2=\frac{v_1}{\omega_n}$, iar legea mişcării devine

$$x=-\frac{a_1}{\omega_n^2}\cos\omega_n t+\frac{v_1}{\omega_n}\sin\omega_n t+\frac{a_1}{\omega_n^2}. \qquad (4)$$

Viteza, respectiv acceleraţia în funcţie de timp se obţin prin derivări:

$$v=\dot{x}=\frac{a_1}{\omega_n}\sin\omega_n t+v_1\cos\omega_n t \qquad (5)$$

$$a=\ddot{x}=a_1\cos\omega_n t-v_1\omega_n\sin\omega_n t. \qquad (6)$$

Prin urmare mişcarea cutiei în contact cu arcul este oscilatorie armonică în jurul poziţiei $x=\frac{a_1}{\omega_n^2}$, amplitudinea mişcării fiind

$$x_0=\sqrt{\left(-\frac{a_1}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{v_1}{\omega_n}\right)^2}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia (6) rezultă amplitudinea acceleraţiei (valoarea ei maximă)

$$a_{max} = \sqrt{a_1^2 + (-v_1\omega_n)^2} = \sqrt{a_1^2 + v_1^2 \frac{k}{m}}. \qquad (8)$$

Această valoare trebuie să fie mai mică sau la limită egală cu 4 g

$$\sqrt{a_1^2 + v_1^2 \frac{k}{m}} = 4g,$$

de unde

$$k = \frac{m}{v_1^2}\left[(4g)^2 - a_1^2\right]. \qquad (9)$$

Numeric rezultă

$$k = \frac{50}{2{,}435^2}\left[(4 \cdot 9{,}81)^2 - 1{,}235^2\right] = 12971{,}78 \text{ N/m}.$$

3) Deformaţia maximă a arcului se compune din $\frac{a_1}{\omega_n^2}$ şi x_0:

$$x_m = \frac{a_1}{\omega_n^2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{\omega_n^2}\right)^2} = \frac{a_1}{\omega_n^2}\left(1 + \sqrt{1 + \omega_n^2 \frac{v_1^2}{a_1^2}}\right).$$

Ţinînd seamă de egalităţile $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, $v_1^2 = 2a_1 l$, rezultatul devine

$$x_m = \frac{ma_1}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\frac{2l}{a_1}}\right). \qquad (10)$$

Înlocuind datele numerice rezultă

$$x_m = \frac{50 \cdot 1{,}235}{12971{,}78}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{12971{,}78}{50} \cdot \frac{2 \cdot 2{,}4}{1{,}235}}\right) = 0{,}156 \text{ m}.$$

Forţa elastică maximă din care este

$$F_{emax} = kx_{max} = 12\,971{,}78 \cdot 0{,}156 = 2\,023{,}9 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Timpul t_2 după care se opreşte cutia se determină egalînd cu zero viteza (5):

$$\frac{a_1}{\omega_n}\sin\omega_n t_2 + v_1\cos\omega_n t_2 = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\omega_n t_2 = -\frac{v_1}{a_1}\omega_n,$$

iar

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12971,78}{50}} = 16,1\,\text{s}^{-1}.$$

Rezultă

$$\operatorname{tg}\omega_n t_2 = -\frac{2,435}{1,235}\cdot 16,1 = -31,7437$$

$$\omega_n t_2 = 1,5393$$

$$t_2 = \frac{1,5393}{16,1} = 0,09\ \text{s}.$$

Astfel, durata mişcării cutiei din poziţia iniţială pînă la oprire este

$$T = t_1 + t_2 = 1,97 + 0,09 = 2,06\ \text{s}.$$

Observaţie: Din relaţia (8) rezultă că acceleraţia maximă este cu atît mai mică cu cît constanta elastică k este mai mică, însă constantă elastică mică înseamnă deformaţie maximă a arcului mare [relaţia (10)].

1.16*.

1) Într-o poziţie oarecare P pe suprafaţa cilindrică asupra căruciorului acţionează greutatea $\vec{G}=m\vec{g}$ şi reacţiunea $\vec{N}$. Desprinderea se produce în poziţia în care reacţiunea normală se anulează. Deci, trebuie să se determine reacţiunea normală N în funcţie de unghiul φ.

Se aplică legea lui Newton, $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}$, care se proiectează pe normala traiectoriei: $m\dfrac{v^2}{R} = mg\sin\varphi - N.$

Scanned with OKEN Scanner

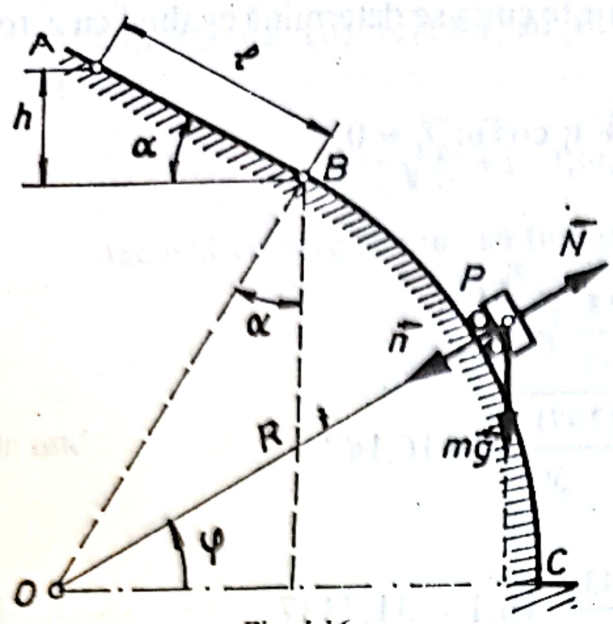


Fig. 1.16

De aici

$$N = mg\sin\varphi - \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

Pentru determinarea vitezei v se aplică teorema energiei cinetice între A şi P.

Deoarece

$$E_{C_A} = 0, \qquad E_{C_P} = \frac{mv^2}{2}$$

şi

$$L_{A-P} = mgh + mg\,(R\cos\alpha - R\sin\varphi),\ h = l\sin\alpha,$$

rezultă

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\sin\alpha + mRg\,(\cos\alpha - \sin\varphi),$$

de unde

$$v^2 = 2gl\sin\alpha + 2Rg\,(\cos\alpha - \sin\varphi). \quad (2)$$

Înlocuind acest rezultat în relaţia (1), se obţine reacţiunea normală N în funcţie de unghiul φ:

$$N = mg\left[3\sin\varphi - 2\left(\frac{l}{R}\sin\alpha + \cos\alpha\right)\right]. \quad (3)$$

În decursul mişcării unghiul φ scade, în consecinţă scade şi reacţiunea N. Ea se anulează pentru

$$\sin\varphi = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{R}\sin\alpha + \cos\alpha\right). \quad (4)$$

Relaţia (4) determină valoarea unghiului φ în momentul în care căruciorul părăseşte suprafaţa cilindrică.

Înlocuind valoarea lui $\sin\varphi$ în relaţia (2), se obţine viteza căruciorului în momentul desprinderii:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{3}(l\sin\alpha + R\cos\alpha)}. \quad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Cu datele numerice din enunț rezultă

$$\sin\varphi=\frac{2}{3}\left(\frac{10}{20}\sin 30^\circ+\cos 30^\circ\right)=0,7440;\quad \varphi=48,07^\circ$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 9,81}{3}\left(10\cdot\sin 30^\circ+20\cdot\cos 30^\circ\right)}=12,08\ \text{m/s}.$$

1.17.

1) Valoarea minimă a distanței l se determină din condiția ca viteza căruciorului să nu se anuleze pînă în poziția E, iar valoarea maximă din condiția ca reacțiunea normală a legăturii să nu devină negativă în decursul mișcării:

$$l_{min}=R\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2};\qquad l_{max}=\frac{R}{2}\,\text{ctg}\,\alpha.$$

2) Problema este posibilă dacă $l_{min}\le l_{max}$, adică $R\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\le\frac{R}{2}\,\text{cotg}\,\alpha$. Condiția este verificată dacă $\alpha\le\arccos\frac{2}{3}=48,19^\circ$. Dacă $\alpha=48,19^\circ$, atunci $l_{min}=l_{max}=0,447\ R$.

3) $v_E=\sqrt{gR\,(3\cos\alpha-2)};\quad N_E=3\,mg\,(1-\cos\alpha)$.

4) Deoarece $\alpha<48,19^\circ$, problema este posibilă

$$l_{min}=1,819\ \text{m};\qquad l_{max}=5,958\ m$$

$$v_E=3,824\ \text{m/s};\qquad N_E=0,234\ \text{mg}.$$

1.18*. În timp ce cama 1 se rotește cu unghiul $\varphi=\omega t$, tachetul 2 se deplasează în direcția axei Oy cu

$$y=C_1C_1'-(O_1O+O_1C_1''),$$

unde

$$O_1O=R-e$$

și

$$O_1C_1''=O_1C_1\cos\varphi=e\cos\omega t$$

Astfel, legea mișcării tachetului este

$$y=e\,(1-\cos\omega t).\qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

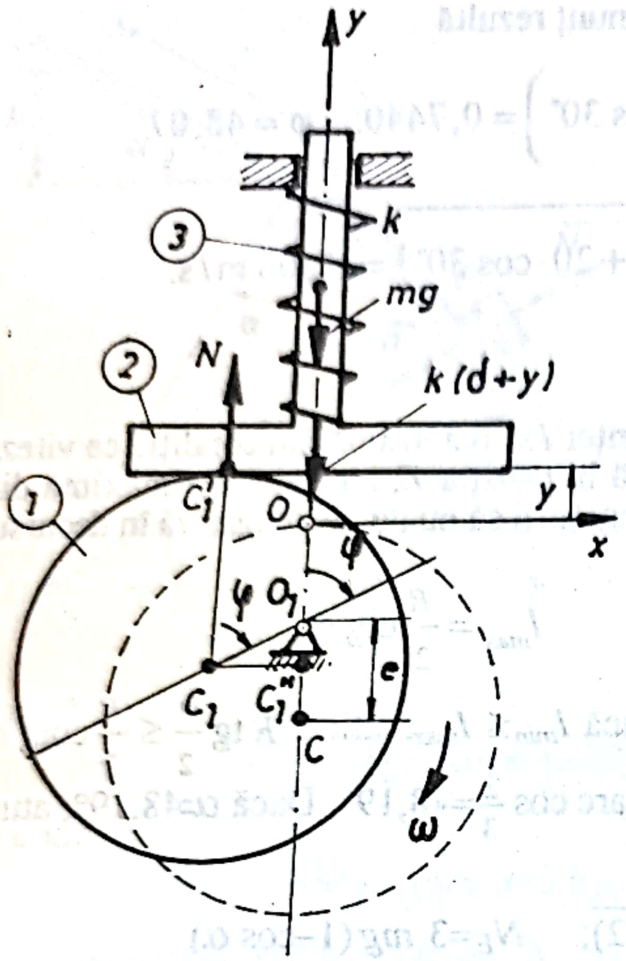


Fig. I.18

Se vede că tachetul efectuează mişcare oscilatorie armonică cu pulsaţia ω şi amplitudinea e.

În decursul mişcării asupra tachetului acţionează greutatea mg, reacţiunea normală N a camei şi forţa elastică a arcului. Dacă se admite că în poziţia $y=0$ arcul are o comprimare iniţială δ, forţa elastică în funcţie de y este $F_e=-k(\delta+y)$.

Aplicînd legea lui Newton, se obţine

$$m\ddot{y}=-mg-k(\delta+y)+N,$$

de unde

$$N=m\ddot{y}+mg+k\delta+ky$$

sau, ţinînd seamă de legea mişcării (1),

$$N=mg+k(\delta+e)+em(\omega^2-\omega_n^2)\cos\omega t, \qquad (2)$$

unde $\omega_n^2=\frac{k}{m}$.

1) Dacă arcul 3 lipseşte, $k=0$, iar relaţia (2) devine

$$N=mg+em\omega^2\cos\omega t. \qquad (3)$$

În acest caz reacţiunea normală N variază între

$$N_{min}=mg-me\omega^2 \text{ şi } N_{max}=mg+me\omega^2.$$

Tachetul rămîne în contact cu cama în tot decursul mişcării dacă $N_{min}\geq 0$, respectiv dacă

$$\omega\leq\omega_0=\sqrt{\frac{g}{e}}=\sqrt{\frac{9,81}{2\cdot10^{-3}}}=70,036 \text{ rad/s}. \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Turaţia maximă corespunzătoare vitezei unghiulare ω_0 este

$$n_0 = \frac{30\omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 70,036}{\pi} = 668,794 \text{ rot/ minut.}$$

2) Dacă există arc, însă comprimarea lui iniţială este nulă (δ=0), rezultă din relaţia (2)

$$N = mg + ke + em\,(\omega^2 - \omega_n^2)\cos \omega t. \qquad (5)$$

În acest caz, dacă $\omega_n < \omega$, valoarea forţei N variază între

$$N_{min} = mg + 2\,ke - em\,\omega^2$$

şi

$$N_{max} = mg + em\,\omega^2.$$

Condiţia $N_{min} \geq 0$ este echivalentă cu

$$k \geq k_1 = \frac{em\omega^2 - mg}{2e}. \qquad (6)$$

Se vede că valoarea minimă necesară a constantei elastice este în funcţie de viteza unghiulară ω, respectiv de turaţie şi creşte o dată cu aceasta.

Turaţiei n_1=2 000 rot/min, îi corespunde viteza unghiulară

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 2000}{30} = 209,439 \text{ rad/ s,}$$

pentru care

$$k_1 = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,24 \cdot 209,439^2 - 0,24 \cdot 9,81}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 4675 \text{ N/ m.}$$

3) Dacă în poziţia y=0 arcul este comprimat cu δ, valoarea reacţiunii normale, dată de relaţia (2), variază între

$$N_{min} = mg + k\,(\delta + 2e) - em\,\omega^2$$

şi

$$N_{max} = k\delta + mg + em\,\omega^2.$$

Condiţia $N_{min} \geq 0$ este satisfăcută dacă

$$k \geq \frac{em\omega^2 - mg}{2e + \delta}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Constanta k avînd valoarea determinată la punctul 2, parametrul δ trebuie să verifice condiţia

$$\delta \geq \frac{em\omega^2 - mg}{k} - 2e \tag{8}$$

Pentru $n=n_2=2\,500$ rot/minut rezultă

$$\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30} = \frac{\pi \cdot 2\,500}{30} = 261{,}8 \text{ rad/s}$$

$$\delta \geq \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}24 \cdot 261{,}8^2 - 0{,}24 \cdot 9{,}81}{4\,675} - 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2{,}53 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

1.19.

1) $E_{C_B}=1{,}962$ J; $v_B=2{,}8$ m/s.

2) $T=9{,}805$ N

3) $\beta=70{,}5°$.

1.20.

1) Între poziţiile A şi C

$$v=\sqrt{v_0^2+2gl\sin\varphi}; \qquad T=m\left(\frac{v_0^2}{l}+3g\sin\varphi\right),$$

iar între C şi D

$$v=\sqrt{v_0^2-2gl_1\sin\theta}; \qquad T=m\left(\frac{v_0^2}{l}-3g\sin\theta\right),$$

unde $l_1=\frac{2}{3}l$.

2) $v_0 \geq \sqrt{2gl}$.

1.21*.

1) Pînă în momentul desprinderii bila se află în repaus relativ faţă de tambur. Forţa direct aplicată asupra ei este greutatea $m\vec{g}$. Forţele de legătură sînt reacţiunile normale $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$ din partea tamburului respectiv a

Scanned with OKEN Scanner

plăcii de antrenare. Forța inerțială (complementară) de transport este forța centrifugă având valoarea $F_t = m R \omega^2$, unde m este masa bilei, $\omega = \frac{\pi n}{30}$ viteza unghiulară a tamburului și $R = \frac{D}{2}$.

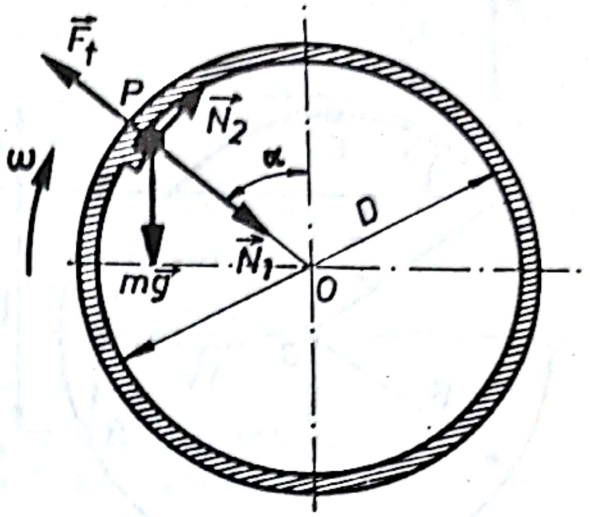


Fig. I.21.1

Condiția de repaus relativ este

$$m\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{F}_t=0. \qquad (1)$$

Proiectînd ecuația (1) pe direcția razei PO, se obține

$$N_1+mg\cos\alpha-mR\omega^2,$$

de unde

$$N_1=mR\omega^2-mg\cos\alpha.$$

Desprinderea se produce în momentul în care reacțiunea N_1 se anulează, cînd

$$\cos\alpha=\frac{R\omega^2}{g}=\frac{D}{2g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2. \qquad (2)$$

Pentru D=0,71 m și n=30 rot/min, rezultă cos α=0,35715, respectiv α=69,07°.

Relația (2) arată că unghiul α este cu atît mai mic cu cît turația este mai mare. Pentru o anumită valoare critică a turației rezultă, din relația (2), α=0 (cos α=1). Această valoare este

$$n_{cr}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{D}}\approx\frac{42,3}{\sqrt{D}}. \qquad (3)$$

Pentru D=0,71 rezultă n_{cr}=50,2 rot/minut. Dacă $n \geq n_{cr}$, bila nu se desprinde de tambur și nu se produce sfărîmarea materialului introdus.

2) Dacă $n < n_{cr}$, bila se desprinde de tambur, cînd unghiul α atinge valoarea dată de relația (2).

În punctul de desprindere A (fig. I.21.2) viteza relativă a bilei este nulă, iar viteza absolută, egală cu cea de transport, $v_A=R\omega$. Ținînd seamă de relația (2), această viteză se poate scrie sub forma $v_A=\sqrt{gR\cos\alpha}$.

Scanned with OKEN Scanner

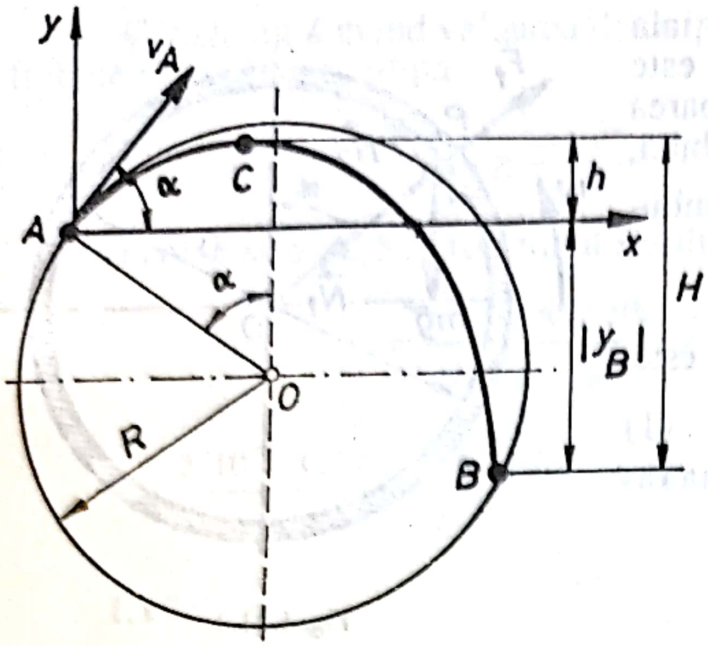


Fig. I.21.2

În continuare bila se mişcă liber sub acţiunea greutăţii proprii. Traiectoria este parabola ACB. Alegînd un sistem de referinţă cu originea în A (fig. I.21.2), ecuaţia traiectoriei se scrie sub forma:

$$y=-\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_A^2\cos^2\alpha}+x\operatorname{tg}\alpha.$$

Înlocuind în această ecuaţie valoarea lui v_A, rezultă

$$y=-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R\cos^3\alpha}+x\operatorname{tg}\alpha. \quad (4)$$

Ecuaţia cercului de rază R (curba de intersecţie dintre tambur şi planul perpendicular pe axa tamburului) faţă de acelaşi sistem de referinţă este

$$(x-R\sin\alpha)^2+(y+R\cos\alpha)^2=R^2. \quad (5)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuaţiile (4) şi (5) se obţin coordonatele punctului B, în care traiectoria bilei intersectează suprafaţa interioară a tamburului:

$$x_B=4R\sin\alpha\cos^2\alpha, \quad y_B=-4R\sin^2\alpha\cos\alpha. \quad (6)$$

Înălţimea totală de cădere a bilei este (vezi fig. I.21.2.)

$$H=|y_B|+h,$$

unde

$$h=\frac{v_A^2}{2g}\sin^2\alpha=\frac{R}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha.$$

Făcînd înlocuirile şi efectuînd calculele, rezultă:

$$H=4{,}5\,R\sin^2\alpha\cos\alpha. \quad (7)$$

Pentru determinarea valorii optime a lui α (şi prin aceasta a turaţiei optime) pentru care înălţimea H devine maximă, se calculează derivata lui H în raport cu α:

$$\frac{dH}{d\alpha}=4{,}5\,R\,(2\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha)=4{,}5\,R\sin\alpha\,(2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivata se anulează dacă sin $\alpha=0$ ($\alpha_1=0$) sau dacă $2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$ ($\mathrm{tg}^2\,\alpha=2$). Soluţia $\alpha_1=0$ corespunde turaţiei critice (3). Soluţia diferită de zero, cuprinsă în primul cadran, este $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{2}=1.4142$; $\alpha_2=54{,}73°$. Se poate verifica uşor că pentru această valoare a lui α înălţimea totală de cădere H devine maximă.

Turaţia optimă se obţine din relaţia (2), în care se înlocuieşte α cu valoarea găsită:

$$n_{opt}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2g\cos 54{,}73^\circ}{D}}\approx\frac{32{,}14}{\sqrt{D}}. \qquad (8)$$

Comparînd valoarea turaţiei optime cu valoarea turaţiei critice (3), se constată că $n_{opt}\approx 0{,}76\,n_{cr}$. Pentru $D=0{,}71$ m, rezultă $n_{opt}=38{,}15$ rot/min.

I.22*. Deoarece banda se mişcă cu viteză constantă, repausul relativ se studiază ca şi cum banda ar fi fixă (forţa complementară de transport este nulă). Particula nu alunecă în jos pe bandă dacă componenta greutăţii, avînd direcţia benzii $G_t=mg\sin\beta$, este mai mică sau cel mult egală cu forţa de frecare maximă

$$T_{max}=\mu_0 N=\mu_0\, mg\cos\beta,$$

$$mg\sin\beta\le\mu_0\, mg\cos\beta,$$

de unde rezultă condiţia

$$\mathrm{tg}\,\beta\le\mu_0. \qquad (1)$$

Deoarece $\mathrm{tg}\,18°=0{,}3249$, pentru $\beta=18°$, condiţia (1) este verificată, deci particula nu alunecă înapoi pe bandă.

Valoarea maximă posibilă a unghiului β este dată de relaţia $\mathrm{tg}\,\beta_{max}=\mu_0=0{,}4$, de unde $\beta_{max}=21{,}8°$.

2) Pe porţiunea $\breve{L}M$ a traiectoriei (fig. I.22.2) particula efectuează mişcare circulară uniformă. Conform legii lui Newton

$$ma=T-mg\sin\theta,\quad m\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta-N.$$

În cazul de faţă $v=v_0=$constant, deci $a_t=0$, rezultînd

$$T=mg\sin\theta\quad\text{şi}\quad N=mg\cos\theta-m\frac{v_0^2}{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

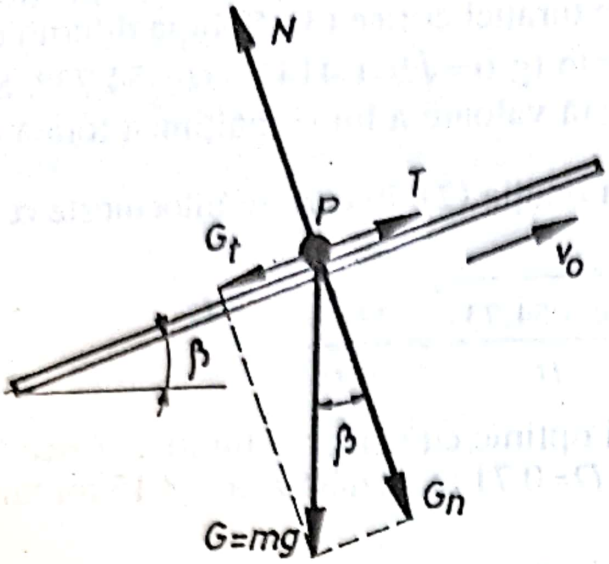


Fig. I.22.1

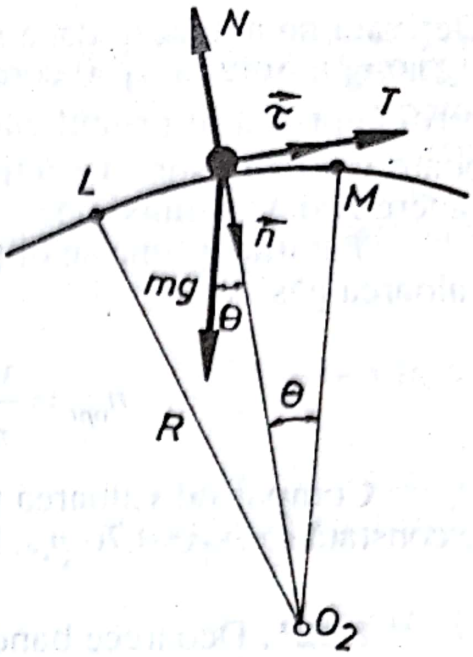


Fig. I.22.2

Pentru ca particula să nu alunece înapoi, trebuie să fie verificată condiţia $T \leq \mu_0 N$, adică

$$mg\sin\theta \leq \mu_0\left(mg\cos\theta - m\frac{v_0^2}{R}\right). \tag{2}$$

În timp ce particula se mişcă de la L la M, unghiul θ variază între β şi 0. Situaţia cea mai defavorabilă este pentru $\theta = \beta$, unde forţa T are cea mai mare valoare posibilă, iar N cea mai mică valoare. Prin urmare, dacă se produce alunecarea. aceasta se produce chiar la începutul arcului de cerc LM şi dacă particula nu alunecă în poziţia L, nu alunecă nici în continuare. În consecinţă, nu se produce alunecarea dacă condiţia (2) este verificată pentru $\theta = \beta$:

$$mg\sin\beta \leq \mu_0\left(mg\cos\beta - m\frac{v_0^2}{R}\right). \tag{3}$$

Rezolvînd inegalitatea (3) în raport cu v_0, rezultă

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{gR}{\mu_0}(\mu_0\cos\beta - \sin\beta)}. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu datele numerice ale problemei rezultă

$$v_0 \le \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 0{,}25}{0{,}4}\left(0{,}4 \cdot \cos 18^\circ - \sin 18^\circ\right)} = 0{,}6616 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Deci, în cazul v_0=0,5 m/s nu se produce alunecarea particulei, însă dacă viteza benzii depăşeşte valoarea limită de 0,6616 m/s, particula alunecă înapoi cînd ajunge în poziţia L.

3) Pe porţiunea MA a traiectoriei (fig I.22.3) particula efectuează, de asemenea, mişcare circulară uniformă. Conform legii lui Newton

$$ma_\tau = mg \sin \varphi - T = 0,$$

$$m\frac{v_0^2}{R} = mg\cos\varphi - N.$$

Din aceste ecuaţii rezultă

$$T = mg \sin \varphi;$$

$$N = mg\cos\varphi - m\frac{v_0^2}{R}.$$

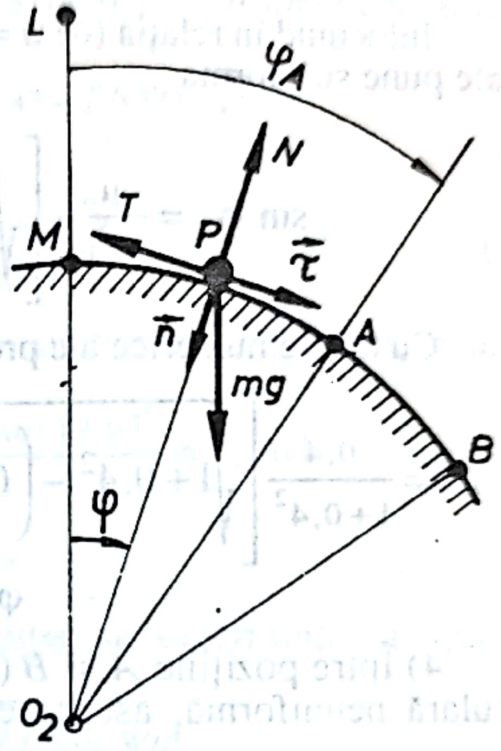


Fig I.22.3

În timp ce unghiul φ creşte, valoarea forţei T creşte de asemenea, iar a lui N scade.

Alunecarea se produce în poziţia în care $T = \mu_0 N$. Prin urmare, unghiul căutat φ_A este soluţia ecuaţiei

$$mg\sin\varphi_A = \mu_0\left(mg\cos\varphi_A - m\frac{v_0^2}{R}\right).$$

Ecuaţia aceasta poate fi pusă sub forma

$$(1+\mu_0^2)\sin^2\varphi_A + 2a\sin\varphi_A + a^2 - \mu_0^2 = 0, \qquad (5)$$

unde

$$a = \mu_0\frac{v_0^2}{gR}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dintre cele două soluții posibile ale ecuației (5) este acceptabilă numai cea cu semnul plus în fața radicalului (φ_A este un unghi ascuțit):

$$\sin\varphi_A=\frac{-a+\sqrt{a^2-\left(1+\mu_0^2\right)\left(a^2-\mu_0^2\right)}}{1+\mu_0^2}. \qquad (6)$$

Înlocuind în relația (6) $a=\mu_0\frac{v_0^2}{gR}$, după calcule simple rezultatul se poate pune sub forma

$$\sin\varphi_A=\frac{\mu_0}{1+\mu_0^2}\left[\sqrt{1+\mu_0^2-\left(\mu_0\frac{v_0^2}{gR}\right)^2}-\frac{v_0^2}{gR}\right]. \qquad (7)$$

Cu datele numerice ale problemei rezultă

$$\sin\varphi_A=\frac{0,4}{1+0,4^2}\left[\sqrt{1+0,4^2-\left(0,4\frac{0,5^2}{9,81\cdot 0,25}\right)^2}-\frac{0,5^2}{9,81\cdot 0,25}\right]=0,33597;$$

$$\varphi_A=19,63°.$$

4) Între pozițiile A și B (fig. I.22.4) particula efectuează mișcare circulară neuniformă. asupra ei acționînd greutatea mg și reacțiunea normală N.

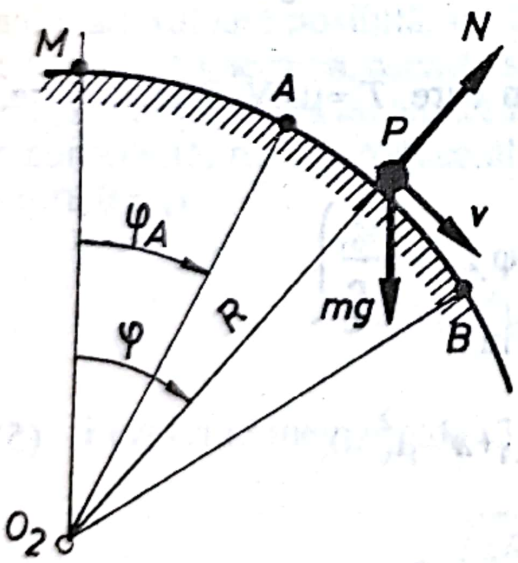


Fig. I.22.4

Viteza v a particulei într-o poziție oarecare P dată de unghiul φ se poate determina cu teorema energiei cinetice:

$$E_{C_P}-E_{C_A}=L_{A-P}.$$

Avem

$$E_{C_A}=\frac{mv_0^2}{2},\qquad E_{C_P}=\frac{mv^2}{2}$$

$$L_{A-P}=mg\,(R\cos\varphi_A-R\cos\varphi).$$

Rezultă

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg\,(R\cos\varphi_A-R\cos\varphi),$$

de unde

$$v^2=v_0^2+2gR\,(\cos\varphi_A-\cos\varphi). \qquad (8)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru reacţiunea normală este valabilă expresia dedusă la punctul precedent, în care v_0 se înlocuieşte cu v:

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R} = mg\cos\varphi - \frac{m}{R}\left[v_0^2 + 2gR(\cos\varphi_A - \cos\varphi)\right]. \quad (9)$$

Particula părăseşte banda transportoare în poziţia în care reacţiunea normală se anulează. Punînd condiţia ca $N=0$ pentru $\varphi=\varphi_B$, se obţine ecuaţia

$$gR\cos\varphi_B - v_0^2 - 2gR\cos\varphi_A + 2gR\cos\varphi_B = 0,$$

avînd soluţia

$$\cos\varphi_B = \frac{v_0^2 + 2gR\cos\varphi_A}{3gR}. \quad (10)$$

Înlocuind în această relaţie datele numerice ale problemei, rezultă

$$\cos\varphi_B = \frac{0{,}5^2 + 2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}25\cdot\cos 19{,}63^\circ}{3\cdot 9{,}81\cdot 0{,}25} = 0{,}6619;$$

$$\varphi_B = 48{,}55^\circ.$$

Viteza particulei în această poziţie se determină cu ajutorul relaţiei (8):

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gR(\cos\varphi_A - \cos\varphi_B)} =$$

$$= \sqrt{0{,}5^2 + 2\ 9{,}81\ 0{,}25\ (\cos 19{,}63^\circ - \cos 48{,}55^\circ)} = 1{,}274 \text{ m/s}.$$

5) Din poziţia B particula devine liberă şi asupra ei acţionează numai greutatea proprie.

Mişcarea particulei libere are loc în planul vertical care conţine viteza iniţială $\vec{v}_B$. În acest plan s-a considerat sistemul de axe xBy, la care se va raporta mişcarea particulei.

Conform legii lui Newton

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = mg \quad \text{sau} \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = g,$$

Integrînd ecuaţiile diferenţiale obţinute, rezultă

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \quad (11)$$

Scanned with OKEN Scanner

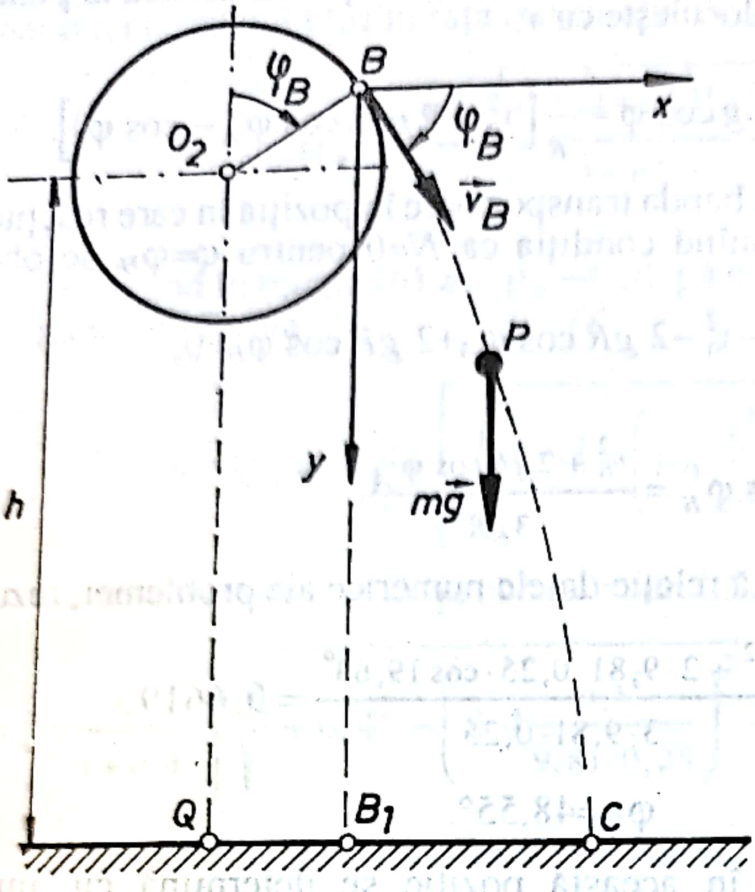


Fig. 1. 22.5

Pe baza condiţiilor iniţiale

$$t=0; \quad x=0; \quad y=0$$

$$\dot{x}=v_B\cos\varphi_B; \quad \dot{y}=v_B\sin\varphi_B$$

se determină constantele de integrare

$$C_1=v_B\cos\varphi_B, \quad C_2=0, \quad C_3=v_B\sin\varphi_B, \quad C_4=0.$$

Cu acestea legea de mişcare (11) devine

$$x=(v_B\cos\varphi_B)\,t, \qquad y=\frac{gt^2}{2}+(v_B\sin\varphi_B)\,t. \tag{12}$$

Prin eliminarea timpului t se obţine ecuaţia traiectoriei

$$y=\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_B^2\cos^2\varphi_B}+\operatorname{tg}\varphi_B x. \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în aceasta $\varphi_B=48,55°$, $v_B=1,274$ m/s şi $g=9,81$ m/s, rezultă

$$y=6,896\,x^2+1,132\,x. \qquad (13')$$

Lungimea segmentului B_1C (fig. I.22.5) se obţine intersectînd parabola (13') cu dreapta ce trece prin punctele Q şi C, avînd ecuaţia

$$y=BB_1=R\cos\varphi_B+h=0,25\cos 48,55°+2=2,1654 \text{ m}.$$

Astfel $x_C=B_1C$ este soluţia ecuaţiei

$$6,896\,x_C^2+1,132\,x_C-2,1654=0.$$

Una dintre rădăcinile acestei ecuaţii este negativă, iar cea pozitivă este $x_C=0,484$ m.

Astfel, distanţa QC este

$$QC=QB_1+B_1C=R\sin\varphi_B+B_1C=0,25\sin 48,55°+0,484=0,671 \text{ m}.$$

1.3. DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

1.23. Acceleraţia mişcării relative, avînd direcţia planului înclinat, este

$$a_r=g\sin\alpha-a_0\cos\alpha.$$

S-a considerat sensul pozitiv în jos. Se vede că acceleraţia relativă este constantă. Se pot distinge trei cazuri:

a) dacă $a_0<g\operatorname{tg}\alpha$, căruciorul coboară pe planul înclinat uniform accelerat;

b) dacă $a_0>g\operatorname{tg}\alpha$, căruciorul se mişcă în sens invers;

c) dacă $a_0=g\operatorname{tg}\alpha$, căruciorul rămîne în repaus relativ.

1.24*.

1) Condiţia ca bila să intre în tub fără ciocnire este ca viteza ei relativă faţă de tub în momentul iniţial $\vec{v}_1$ să aibă direcţia tubului. Viteza de

Scanned with OKEN Scanner

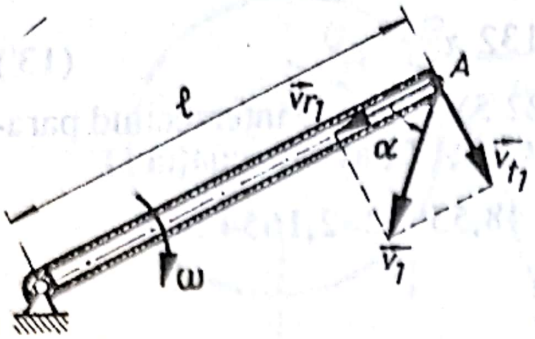


Fig. I.24.1

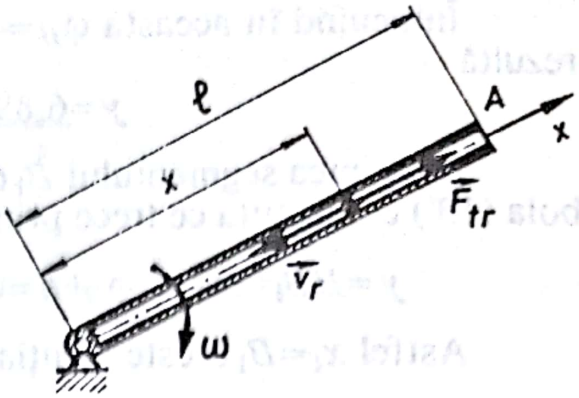


Fig. I.24.2

transport este perpendiculară pe tub şi are valoarea $v_{t_1} = l\,\omega = 0{,}6 \cdot 1{,}5 = 0{,}9$ m/s.

Suma vectorială a vitezelor $\vec{v}_{r_1}$ şi $\vec{v}_{t_1}$ este viteza absolută $\vec{v}_1$. Din paralelogramul vitezelor (fig. I.24.1) rezultă

$$\sin\alpha = \frac{v_{t_1}}{v_1} = \frac{l\omega}{v_1}. \qquad (1)$$

Unghiul α trebuie să aibă valoarea ce rezultă din relaţia (1). Se vede că problema are soluţie numai dacă $v_1 > l\,\omega = 0{,}9$ m/s. Pentru $v_1 = 1{,}26$ m/s rezultă:

$$\sin\alpha = \frac{0{,}9}{1{,}26} = 0{,}71428; \quad \alpha = 45°35'.$$

Viteza relativă iniţială a bilei este

$$v_{r_1} = v_1 \cos\alpha = 1{,}26 \cdot \cos 45{,}58° = 0{,}8818 \text{ m/s}.$$

2) În continuare trebuie să se studieze mişcarea bilei în interiorul tubului. Greutatea bilei este perpendiculară pe direcţia mişcării. Dintre forţele complementare, forţa Coriolis $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ este de asemenea perpendiculară pe direcţia mişcării. Astfel, singura forţă care intervine în studiul mişcării relative a bilei este forţă complementară de transport orientată de-a lungul tubului (fig. I.24.2) şi avînd valoarea $F_{tr} = mx\,\omega^2$.

Ecuaţia diferenţială a mişcării relative este

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \quad \text{sau} \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0. \qquad (2)$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene este de forma

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza condiţiilor iniţiale

$$t=0, \quad x=l, \quad \dot{x}=-v_{r_1}$$

rezultă pentru constantele de integrare valorile

$$C_1=\frac{1}{2}\left(l-\frac{v_{r_1}}{\omega}\right); \qquad C_2=\frac{1}{2}\left(l+\frac{v_{r_1}}{\omega}\right).$$

Înlocuind aceste valori în legea mişcării (3), aceasta poate fi scrisă sub forma

$$x=l\,\mathrm{ch}\,\omega t-\frac{v_{r_1}}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega t. \tag{4}$$

Viteza relativă a bilei se obţine prin derivare:

$$v_r=\dot{x}=l\omega\,\mathrm{sh}\,\omega t-v_{r_1}\,\mathrm{ch}\,\omega t. \tag{5}$$

Bila înaintează în tub pînă în momentul în care viteza ei relativă se anulează. Durata t_1 a acestei mişcări este rădăcina ecuaţiei $l\omega\,\mathrm{sh}\,\omega t_1-v_{r_1}\,\mathrm{ch}\,\omega t_1=0$, respectiv

$$\mathrm{th}\,\omega t_1=\frac{v_{r_1}}{l\omega}. \tag{6}$$

Înlocuind valoarea lui t_1 dată de relaţia (6) în legea mişcării (4), se poate determina valoarea minimă posibilă a lui x. Avem:

$$\mathrm{ch}\,\omega t_1=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,\omega t_1}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2}}, \qquad \mathrm{sh}\,\omega t_1=\frac{\mathrm{th}\,\omega t_1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,\omega t_1}}=\frac{\frac{v_{r_1}}{l\omega}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2}},$$

şi astfel

$$x_{min}=l\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2}}-\frac{v_{r_1}}{\omega}\frac{\frac{v_{r_1}}{l\omega}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2}}=l\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Numeric rezultă

$$x_{min} = 0,6\sqrt{1-\left(\frac{0,8818}{0,9}\right)^2} = 0,12 \text{ m}.$$

Astfel, distanţa parcursă de bilă în interiorul tubului este $l - x_{min} = 0,6 - 0,12 = 0,48$ m.

3) Pentru mişcarea bilei în sens invers este valabilă aceeaşi ecuaţie diferenţială (2) cu soluţia (3). Dacă timpul se măsoară din momentul în care începe această mişcare, condiţiile iniţiale sînt

$$t=0; \quad x=x_{min}=0,12 \text{ m}; \quad \dot{x}=0.$$

Pe baza acestora rezultă: $C_1 = C_2 = \frac{x_{min}}{2}$, iar legea mişcării (3) devine:

$$x = x_{min} \operatorname{ch} \omega t. \tag{7}$$

Intervalul de timp t_2 în care bila ajunge la capătul tubului este rădăcina ecuaţiei $l = x_{min} \operatorname{ch} \omega t_2$, de unde

$$\operatorname{ch} \omega t_2 = \frac{l}{x_{min}} = \frac{0,6}{0,12} = 5. \tag{8}$$

Viteza relativă a bilei este

$$v_r = \dot{x} = x_{min}\, \omega \operatorname{sh} \omega t,$$

avînd la momentul t_2 valoarea

$$v_{r_2} = x_{min}\, \omega \operatorname{sh} \omega t_2 = x_{min}\, \omega \sqrt{\operatorname{ch}_2 \omega t_2 - 1} =$$

$$= l\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2} \times \omega \sqrt{\left[\frac{l}{l\sqrt{1-\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right)^2}}\right]^2 - 1} = v_{r_1}.$$

Deoarece şi valoarea vitezei de transport $\vec{v}_{t_2}$ în acest moment este egală cu valoarea lui $\vec{v}_{t_1}$ ($l\omega$), viteza $\vec{v}_2$ cu care părăseşte bila tubul (fig. I.24.3) are valoarea egală cu valoarea vitezei $\vec{v}_1$ cu care a intrat în tub. Evident, şi unghiul β este egal cu unghiul α.

Scanned with OKEN Scanner

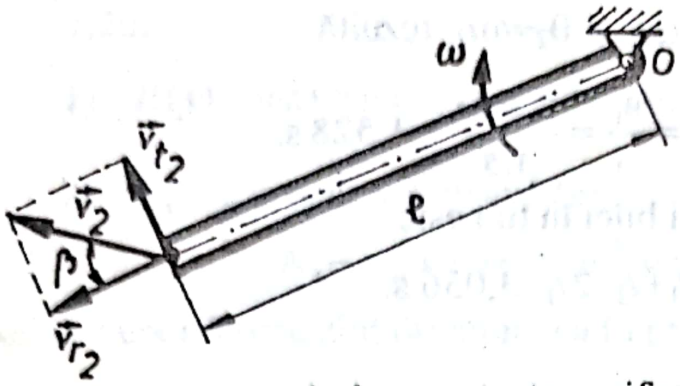


Fig. I.24.3

4) Deoarece tubul se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω, unghiul de rotaţie în primul interval este $\theta_1=\omega t_1$, iar în cel de al doilea $\theta_2=\omega t_2$.

Pe baza relaţiei (6) rezultă

$$\theta_1 = \omega t_1 = \operatorname{arg\,th}\left(\frac{v_{r_1}}{l\omega}\right) = \operatorname{arg\,th}\frac{0,8818}{0,9} = 2,2924 \text{ rad},$$

iar pe baza relaţiei (8)

$$\theta_2=\omega t_2=\operatorname{arg\,ch} 5=2,2924 \text{ rad}.$$

Prin urmare $\theta_1=\theta_2$, iar unghiul total de rotaţie este

$$\theta_1+\theta_2=4,5948 \text{ rad } (262,69°).$$

În fig. I.24.4 s-a reprezentat tubul în momentele în care bila intră în tub (poziţia 1), iese din tub (poziţia 2) şi în momentul în care se anulează viteza relativă a bilei.

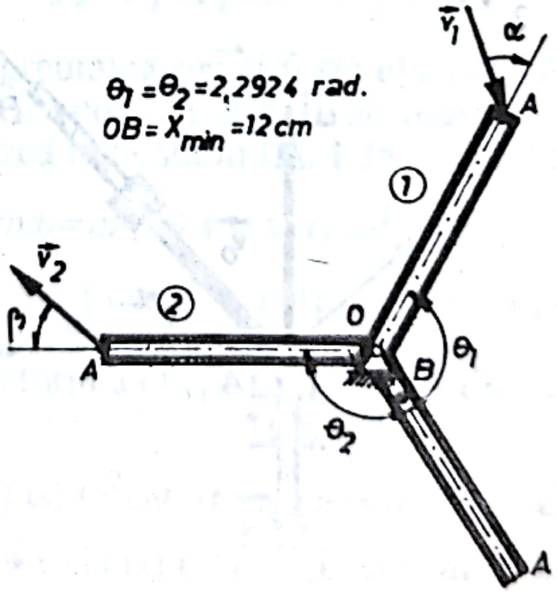


Fig. I.24.4

5) Din egalităţile $\theta_1=\omega t_1$ şi $\theta_2=\omega t_2$, rezultă

$$t_1 = t_2 = \frac{\theta_1}{\omega} = \frac{2,2924}{1,5} = 1,528 \text{ s}.$$

Astfel, durata mişcării bilei în tub este

$$t_1+t_2=2t_1=3,056 \text{ s}.$$

1.25.

1) $\omega \geq \sqrt{\dfrac{g \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}}$

2) Legea mişcării relative este

$$y=\frac{v_0}{p} \operatorname{sh} pt - y_0 \operatorname{ch} pt + y_0,$$

unde $p=\omega \cos \alpha$, iar $y_0 = \dfrac{g \sin \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha}$ reprezintă valoarea lui y în poziţia de repaus relativ. Proiecţiile reacţiunii normale pe axele de coordonate sînt

$$N_x=-2mp\,(v_0 \operatorname{ch} pt - y_0 \operatorname{sh} pt); \quad N_y=0$$

$$N_z=mg \cos \alpha - m\omega^2 y \sin \alpha \cos \alpha.$$

3) $v_0 \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{gl \sin \alpha}.$

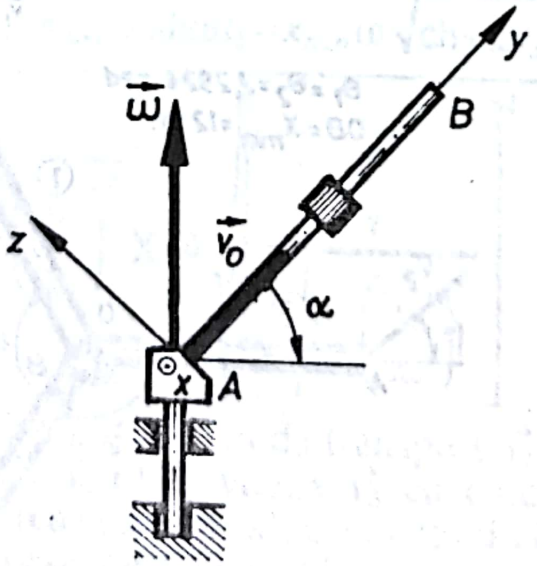


Fig. 1.25

Scanned with OKEN Scanner

1.26.

1) $P(y)=ma+mg\cos\alpha-m\omega^2 y\sin^2\alpha$.

2) $N_x=-2m\omega at=-2m\omega\sqrt{2ay}$, $\quad N_y=0$

$$N_z=mg\sin\alpha+m\omega^2 y\sin\alpha\cos\alpha.$$

(Axele de coordonate sînt orientate ca în problema precedentă.

3) $y=\frac{aT}{p}\sin pt+\left(\frac{aT^2}{2}-\frac{a}{p^2}\right)\cos pt+\frac{a}{p^2}$, unde $p=\omega\sin\alpha$.

1.27.

1) $\ddot{x}+(\omega_n^2-\omega^2)x=0$, unde $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{kg}{G}}$.

(Axa x este de-a lungul canalului AB şi are originea în punctul O'.)

2) $\omega<\omega_n$; $\quad T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2-\omega^2}}$.

1.28*.

1) Condiţia de repaus relativ este

$$\vec{F}_d+\vec{F}_l+\vec{F}_t=0. \qquad (1)$$

Forţele direct aplicate sînt greutatea $m\vec{g}$ şi forţa elastică $\vec{F}_e=-k(x-l_0)\vec{i}$. Forţa complementară de transport ca şi cele de mai înainte, se află în planul hîrtiei, avînd orientarea indicată în fig. I.28. şi valoarea

$$F_t=ma_t=m(r+x\sin\alpha)\omega^2.$$

Din partea tubului apare o reacţiunea N, perpendiculară pe axa tubului, situată în planul în care se găsesc toate celelalte forţe.

Proiectînd ecuaţia vectorială (1) pe axele Ox şi Oy, rezultă ecuaţiile scalare

$$\Sigma X_i=m(r+x\sin\alpha)\omega^2\sin\alpha-mg\cos\alpha-k(x-l_0)=0 \qquad (2)$$

$$\Sigma Y_i=N-m(r+x\sin\alpha)\omega^2\cos\alpha-mg\sin\alpha=0. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

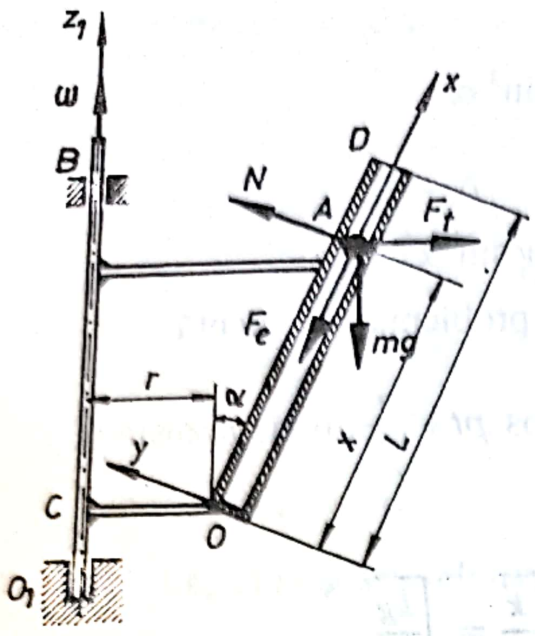


Fig. I.28

Din ecuaţia (2) se determină valoarea lui x, corespunzătoare poziţiei de repaus relativ

$$x_r = \frac{r\omega^2 \sin\alpha + \omega_n^2 l_0 - g\cos\alpha}{\omega_n^2 - \omega^2 \sin^2\alpha}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{4}$$

iar din (3) reacţiunea tubului în această poziţie

$$N = m(r + x_r \sin\alpha)\omega^2 \cos\alpha + mg\sin\alpha. \tag{5}$$

Repausul relativ este posibil numai dacă x_r are valori cuprinse între 0 şi L. Dacă $k > \dfrac{mg\cos\alpha}{l_0}$, numărătorul expresiei (4) este pozitiv chiar dacă $r \to 0$.

Pentru ca x_r să fie pozitiv, trebuie ca şi numitorul să fie pozitiv, adică să avem $\omega < \dfrac{\omega_n}{\sin\alpha}$.

Condiţia $x_r < L$ este îndeplinită dacă

$$\omega < \sqrt{\frac{(L - l_0)\omega_n^2 + g\cos\alpha}{(r + L\sin\alpha)\sin\alpha}}. \tag{6}$$

2) În timpul mişcării relative mai apare forţa complementară Coriolis $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r$, care însă este perpendiculară pe direcţia mişcării relative. Astfel, ecuaţia diferenţială scalară a mişcării relative este

$$m\ddot{x} = m(r + x\sin\alpha)\omega^2 \sin\alpha - mg\cos\alpha - k(x - l_0),$$

sau sub o altă formă

$$\ddot{x} + (\omega_n^2 - \omega^2\sin^2\alpha)x = r\omega^2\sin\alpha + \omega_n^2 l_0 - g\cos\alpha \tag{7}$$

Legea mişcării relative este soluţia acestei ecuaţii diferenţiale. Sînt posibile trei cazuri:

a) $\omega\sin\alpha < \omega_n \left(\omega < \dfrac{\omega_n}{\sin\alpha}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul lui x din ecuaţia (7) fiind pozitiv, se poate face notaţia

$$\omega_n^2-\omega^2 \sin^2 \alpha=\Omega^2. \tag{8}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (7) este

$$x=C_1 \cos \Omega t+C_2 \sin \Omega t+x_p, \tag{9}$$

Soluţia particulară x_p coincide cu x_r, iar pentru constantele de integrare C_1 şi C_2 rezultă pe baza condiţiilor iniţiale $t=0$, $x=l_0$, $\dot{x}=0$, valorile

$$C_1=-(x_r-l_0), \quad C_2=0.$$

Legea mişcării relative (9), cu aceste valori, devine

$$x=x_r-(x_r-l_0) \cos \Omega t, \tag{10}$$

şi arată că bila oscilează în jurul poziţiei de repaus relativ cu amplitudinea (x_r-l_0). Pentru ca bila să nu părăsească tubul în timpul mişcării este necesar ca valoarea maximă a lui x ($x_{max}=x_r+|x_r-l_0|$) să fie mai mică decît lungimea L a tubului.

b) $$\omega=\frac{\omega_n}{\sin \alpha}.$$

Coeficientul lui x din ecuaţia (7) este nul, acceleraţia bilei este constantă, deci mişcarea relativă este uniform accelerată cu acceleraţia

$$a_r=r\omega^2 \sin \alpha+\omega_n^2 l_0-g \cos \alpha=\frac{r+l_0 \sin \alpha}{\sin \alpha} \omega_n^2-g \cos \alpha. \tag{11}$$

c) $$\omega>\frac{\omega_n}{\sin \alpha}.$$

În acest caz coeficientul lui x din ecuaţia (7) este negativ, şi soluţia ecuaţiei se exprimă prin funcţiile hiperbolice. Procedînd ca în cazul a), rezultă în final legea mişcării

$$x=x_r-(x_r-l_0) \operatorname{ch} \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha-\omega_n^2} \cdot t. \tag{12}$$

1.29.

1) $$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{2(g+a)}{r}(\cos \theta-\cos \theta_0)}$$

$$N = m\left[(g+a)\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right) + \omega_n^2 r\right].$$

2) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2(g+a)}{r}}$; b) $\omega_0 > 2\sqrt{\dfrac{g+a}{r}}$.

1.30*.

1) Se va studia mişcarea relativă a sarcinii faţă de un sistem de referinţă mobil, legat de cărucior, care efectuează mişcare de translaţie rectilinie cu acceleraţia $\vec{a}_0$. Forţa direct aplicată este greutatea $\vec{mg}$, forţa de legătură, tensiunea $\vec{T}$ din cablu, iar dintre forţele inerţiale apare numai ceea de transport şi $\vec{F}_t = -m\vec{a}_0$.

Ecuaţia vectorială

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_t$$

se proiectează pe axele intrinseci

$$m\frac{dv_r}{dt} = -mg\sin\varphi + ma_0\cos\varphi \qquad (1)$$

$$m\frac{v_r^2}{l} = -mg\cos\varphi - ma_0\sin\varphi + T. \qquad (2)$$

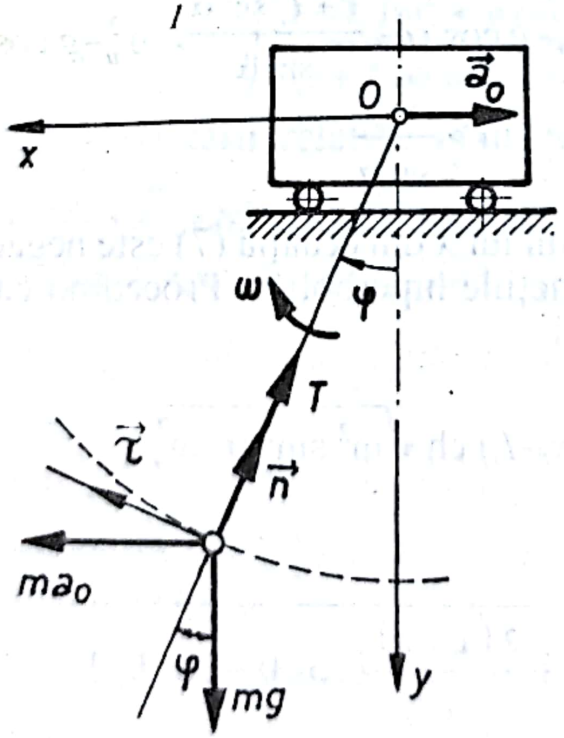


Fig. 1. 30

Scanned with OKEN Scanner

Mişcarea relativă fiind circulară, $v_r = l\omega$ şi

$$\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = l\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} = l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\omega^2}{2}\right).$$

Înlocuind această expresie în (1) şi simplificînd cu m, rezultă

$$l\,\mathrm{d}\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = (-g\sin\varphi + a_0\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

După integrare se obţine

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos\varphi + \frac{a_0}{g}\sin\varphi\right) + C.$$

Din condiţia că la $\varphi=0$, $\omega=0$, rezultă pentru constanta de integrare C valoarea $-\frac{2g}{l}$ şi astfel:

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}\left(\frac{a_0}{g}\sin\varphi - 1 + \cos\varphi\right). \qquad (3)$$

Valoarea unghiului φ creşte pînă în momentul în care viteza unghiulară ω se anulează. Deci, unghiul φ_{max} se obţine din condiţia $\omega = 0$, respectiv

$$\frac{a_0}{g}\sin\varphi_{max} - 1 + \cos\varphi_{max} = 0.$$

Ecuaţia obţinută se poate scrie sub forma:

$$\frac{1-\cos\varphi_{max}}{\sin\varphi_{max}} = \frac{a_0}{g},$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_{max}}{2} = \frac{a_0}{g}, \qquad \varphi_{max} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{a_0}{g}. \qquad (4)$$

Deoarece $\omega=0$ pentru $\varphi=0$ şi $\varphi=\varphi_{max}$, trebuie să existe pentru ω o valoare maximă în intervalul $(0, \varphi_{max})$. Pentru determinarea valorii maxime se calculează derivata funcţiei

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{g}\sin\varphi - 1 + \cos\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

în raport cu φ

$$\frac{d f}{d \varphi} = \frac{a_0}{g} \cos \varphi - \sin \varphi.$$

Valoarea φ_1 a unghiului φ pentru care viteza unghiulară devine maximă este rădăcina ecuației $\frac{d f}{d \varphi} = 0$:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a_0}{g}, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_0}{g}. \tag{5}$$

Comparînd relațiile (5) și (4) între ele, se poate constata că $\varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_{max}$.

Înlocuind în relația (3) $\varphi = \varphi_1$, se obține viteza unghiulară maximă:

$$\omega_{max}^2 = \frac{2}{l}\left(\sqrt{a_0^2 + g^2} - g\right). \tag{6}$$

2) Tensiunea din cablu se determină din ecuația (2). Rezultă

$$T = ml\omega^2 + mg \cos \varphi + ma_0 \sin \varphi = ml \frac{2g}{l}\left(\frac{a_0}{g} \sin \varphi - 1 + \cos \varphi\right) + \tag{7}$$

$$+ mg \cos \varphi + ma_0 \sin \varphi = mg\left(3 \cos \varphi - 2 + \frac{3a_0}{g} \sin \varphi\right).$$

Ea este maximă acolo unde derivata ei în raport cu φ se anulează:

$$\frac{d T}{d \varphi} = mg\left(-3 \sin \varphi + \frac{3a_0}{g} \cos \varphi\right) = 0.$$

Din această ecuație rezultă pentru φ valoarea φ*, dată de relația

$$tg \varphi^* = \frac{a_0}{g}. \tag{8}$$

Valoarea φ* a unghiului φ coincide cu φ_1, pentru care viteza unghiulară devine maximă. Unghiul $\varphi = \varphi^* = \varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_{max}$ determină pe de altă parte poziția de repaus relativ a sarcinii, în jurul căreia aceasta oscilează.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valoarea găsită a unghiului în (7), se obţine tensiunea maximă:

$$T_{max} = mg\left(3\sqrt{1+\left(\frac{a_0}{g}\right)^2} - 2\right). \qquad (9)$$

1.31. Ecuaţia diferenţială a mişcării relative este

$$\ddot{\theta} + \frac{r}{l}\omega^2 \sin\theta = 0,$$

unde θ este unghiul dintre direcţiile AB şi OA. Dacă unghiul θ rămîne mic ($\sin\theta \approx \theta$), pot rezulta mici oscilaţii cu pulsaţia

$$\omega_n = \sqrt{\frac{r}{l}}\,\omega.$$

1.32.

1) $t_1 = \frac{1}{\omega}\operatorname{arg\,ch}\frac{L}{x_0}$; $\quad v_{r_1} = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}$.

2) $t_2 = \frac{1}{\omega}\frac{\sqrt{K^2\left(1+\lambda^2\right)-1}-\lambda}{1+\lambda^2}$, unde $K = \frac{R}{L}$, $\lambda = \sqrt{1-\left(\frac{x_0}{L}\right)^2}$.

3) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, unde $\alpha_1 = \omega t_1$ şi $\alpha_2 = \omega t_2$.

4) $$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\alpha_2\left(-\cos\alpha_2 + \lambda\sin\alpha_2\right) + \sin\alpha_2}{\alpha_2\left(\sin\alpha_2 + \lambda\cos\alpha_2\right) + \cos\alpha_2}\right]$$

$$\overset{\frown}{CB} = R\beta.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. DINAMICA CORPULUI RIGID ŞI A SISTEMELOR DE CORPURI

2.1*.

1) Se aplică teorema mişcării centrului de greutate, care conduce la ecuaţiile

$$Ma = F \tag{1}$$

$$0 = N_B + N_D - Mg, \tag{2}$$

şi teorema momentului cinetic în raport cu axa Cz:

$$0 = N_D d - N_B d - Fh. \tag{3}$$

Din ecuaţia (1) rezultă imediat acceleraţia

$$a = \frac{F}{M} = \frac{540}{150} = 3,6 \text{ m/s}^2.$$

Din ecuaţiile (2) şi (3) se determină reacţiunile:

$$N_D = \frac{Mg}{2} + \frac{Fh}{2d} = \frac{150 \cdot 9,81}{2} + \frac{540 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,75} = 879,75 \text{ N},$$

$$N_B = \frac{Mg}{2} - \frac{Fh}{2d} = \frac{150 \cdot 9,81}{2} - \frac{540 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,75} = 591,75 \text{ N}.$$

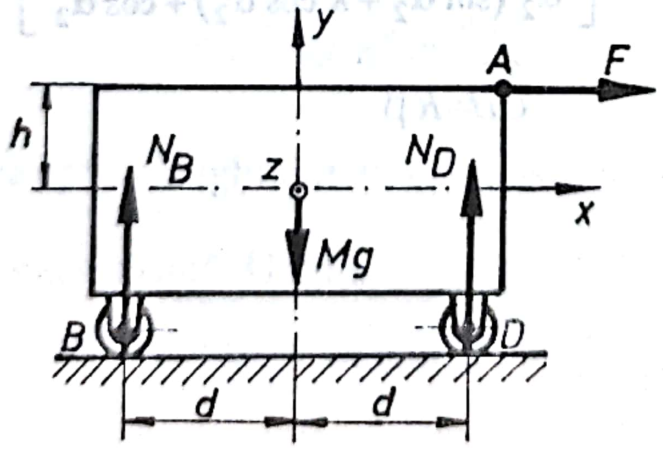


Fig. II.1

Scanned with OKEN Scanner

2) Valoarea maximă posibilă a forţei F se determină din condiţia $N_B=0$. Rezultă:

$$F_{max}= Mg\frac{d}{h}=150\cdot 9{,}81\,\frac{0{,}75}{0{,}40}=2759{,}06\ \text{N}.$$

Valoarea corespunzătoare a acceleraţiei este

$$a_{max}=\frac{F_{max}}{M}=g\frac{d}{h}=9{,}81\,\frac{0{,}75}{0{,}40}=18{,}39\ \text{m/s}^2.$$

Reacţiunea din D în acest caz are valoarea

$$N_D=\frac{Mg}{2}+Mg\frac{d}{h}\,\frac{h}{2d}=Mg=1471{,}5\ \text{N}.$$

2.2

1) $x=x_0\cos\omega_n t$, unde $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1+m_2}}$, iar x se măsoară din poziţia în care arcurile sînt nedeformate.

2) $N=\dfrac{k_1m_2-k_2m_1}{m_1+m_2}\,x$ 3) $\dfrac{k_1}{m_1}=\dfrac{k_2}{m_2}$.

2.3* Bara AB efectuează o mişcare de translaţie rectilinie. Forţele care acţionează asupra ei sînt: greutatea Mg ,reacţiunile normale N_D, N_E şi forţele de frecare, avînd valorile $T_D=\mu N_D$ şi $T_E=\mu N_E$.

Pentru studiul mişcării barei se aplică teorema mişcării centrului de greutate şi teorema momentului cinetic în raport cu o axă orizontală, perpendiculară pe planul hîrtiei, ce trece prin centrul de greutate C al barei:

$$m\ddot{x}=G\sin\alpha-T_D-T_E \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}=0=G\cos\alpha+N_D-N_E \qquad (2)$$

$$J\varepsilon=0=N_D\left(\frac{3l}{2}-x\right)-N_E\left(\frac{l}{2}-x\right). \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

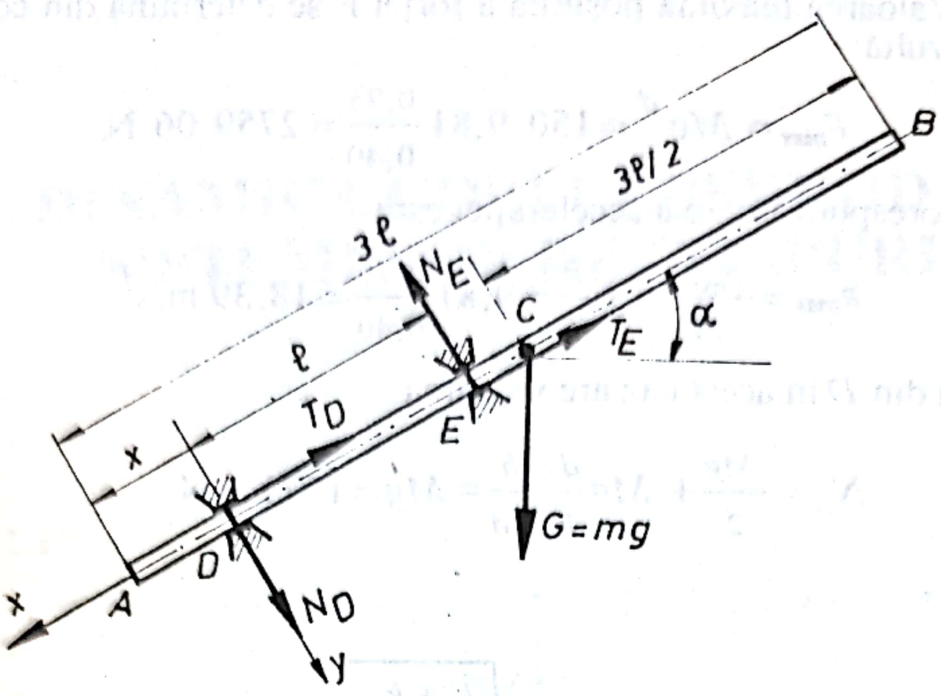


Fig. II.3.1

Din ecuaţiile (2) şi (3) rezultă:

$$N_D = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) G\cos\alpha\,, \tag{4}$$

$$N_E = \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{l}\right) G\cos\alpha\,. \tag{5}$$

Se vede că reacţiunile normale N_D şi N_E îşi schimbă semnul în intervalul $[0, 2l]$, de aceea forţele de frecare trebuie scrise cu ajutorul modulelor:

$$T_D = \mu\,|N_D| = \mu\, G\cos\alpha \left|\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right|, \tag{6}$$

$$T_E = \mu\,|N_E| = \mu\, G\,\cos\alpha \left|\frac{3}{2} - \frac{x}{l}\right|. \tag{7}$$

Înlocuind (6) şi (7) în (1), ecuaţia diferenţială a mişcării devine

$$\ddot{x} = a = g\sin\alpha - \mu\, g\cos\alpha\; f\left(\frac{x}{l}\right), \tag{8}$$

unde

$$f\left(\frac{x}{l}\right)=\left|\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right|+\left|\frac{3}{2}-\frac{x}{l}\right|=\begin{cases}2\left(1-\frac{x}{l}\right) & \text{pentru } 0\le\frac{x}{l}\le\frac{1}{2}\\ 1 & \text{pentru } \frac{1}{2}\le\frac{x}{l}\le\frac{3}{2}\\ 2\left(\frac{x}{l}-1\right) & \text{pentru } \frac{3}{2}\le\frac{x}{l}\le 2.\end{cases} \qquad (9)$$

În fig. II.3.2 este reprezentată funcţia $f\left(\frac{x}{l}\right)$ în funcţie de $\frac{x}{l}$ pentru $\frac{x}{l}\in[0,2]$.

Se vede că la început pentru $\frac{x}{l}\in[0;\ 0{,}5]$, $f\left(\frac{x}{l}\right)$, scade liniar de la 2 la 1, apoi în intervalul [0,5; 1,5] este constantă, iar în final între 1,5 şi 2 creşte liniar de la 1 la 2.

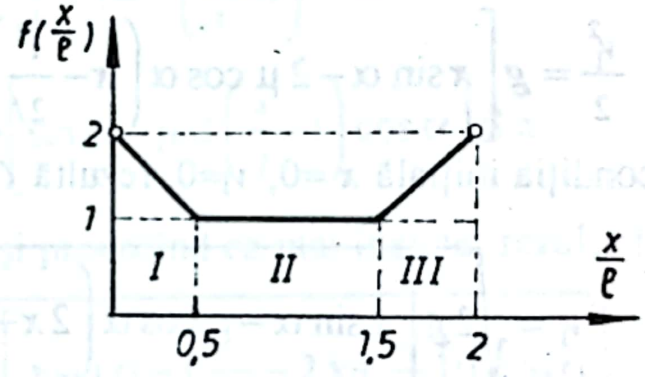


Fig. II.3.2

Condiţia ca bara să pornească este ca acceleraţia la început să fie pozitivă,

$$g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha\,2>0$$

de unde rezultă tg $\alpha>2\mu$. Dacă această condiţie este satisfăcută, acceleraţia barei este pozitivă în tot timpul mişcării, deci mişcarea este accelerată. În intervalul [0,5; 1,5] în care centrul de greutate se află între ghidaje, acceleraţia este constantă, deci în acest interval mişcarea este uniform accelerată.

Pentru a putea determina viteza în funcţie de x, se elimină din ecuaţia (8) timpul, folosind egalitatea

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obţine:

$$v\,\mathrm{d}\,v = g\left[\sin\alpha - \mu\cos\alpha\; f\left(\frac{x}{l}\right)\right]\mathrm{d}\,x \qquad (10)$$

Ecuaţia (10) trebuie integrată separat pe cele trei intervale, indicate în fig. II.3.2.

Intervalul I

$$x \in \left[0, \frac{l}{2}\right].$$

Înlocuind valoarea corespunzătoare a funcţiei $f\left(\frac{x}{l}\right)$, ecuaţia (10) devine

$$v\,\mathrm{d}\,v = g\left[\sin\alpha - \mu\cos\alpha\, 2\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]\mathrm{d}\,x.$$

Integrînd această ecuaţie diferenţială se obţine

$$\frac{v_I^2}{2} = g\left[x\sin\alpha - 2\,\mu\cos\alpha\left(x-\frac{x^2}{2l}\right)\right] + C_1. \qquad (11)$$

Din condiţia iniţială $x=0$, $v_I=0$, rezultă $C_I=0$ şi expresia vitezei devine

$$v_I = \sqrt{2g\left[x\sin\alpha - \mu\cos\alpha\left(2x-\frac{x^2}{l}\right)\right]}. \qquad (12)$$

Intervalul II.

$$x \in \left[\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right].$$

În acest interval $f\left(\frac{x}{l}\right)=1$, iar ecuaţia (10) devine

$$v\,dv = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,dx$$

Prin intregare se obţine

$$\frac{v_{II}^2}{2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,x + C_2. \qquad (13)$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea constantei de integrare C_2 se determină din condiţia că viteza la începutul acestui interval este egală cu viteza la sfîrşitul intervalului precedent. Pe baza ecuaţiilor (11) şi (13) rezultă:

$$g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\frac{l}{2}+C_2=\frac{gl}{2}\left(\sin\alpha-\frac{3}{2}\mu\cos\alpha\right)$$

de unde $C_2=-g\frac{l}{4}\mu\cos\alpha$. Astfel, viteza în acest interval va fi.

$$v_{II}=\sqrt{2g\left[x\sin\alpha-\left(x+\frac{l}{4}\right)\mu\cos\alpha\right]}. \qquad (14)$$

Intervalul III:

$$x\in\left[\frac{3l}{2},\,2l\right].$$

În acest interval $f\left(\frac{x}{l}\right)=2\left(\frac{x}{l}-1\right)$, iar ecuaţia diferenţială (10) devine

$$v\,\mathrm{d}\,v=g\left[\sin\alpha-\mu\,2\left(\frac{x}{l}-1\right)\cos\alpha\right]\mathrm{d}\,x.$$

Integrînd ecuaţia şi procedînd ca mai înainte, rezultă în final

$$v_{III}=\sqrt{2g\left[x\sin\alpha-\left(\frac{x^2}{l}-2x+\frac{5l}{2}\right)\mu\cos\alpha\right]}. \qquad (15)$$

Viteza barei la sfîrşitul acestui interval ($x=2l$) devine

$$v_{III}(l)=\sqrt{gl(4\sin\alpha-5\mu\cos\alpha)}.$$

2.4.

1) Perioada oscilaţiilor nu depinde de distanţa x, chiar mai mult, nici de greutăţile corpurilor.

2) $$N_{AD}=\frac{1}{2}\left(G-\frac{x}{d}G_2\right)(3\cos\theta-2\cos\theta_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$N_{BE}=\frac{1}{2}\left(G+\frac{x}{d}G_2\right)(3\cos\theta-2\cos\theta_0)$$

unde $G=G_1+G_2$.

2.5 1) $\mu=0{,}107$; 2) $N=9{,}55$ rotaţii.

2.6.* Cilindrul se roteşte în jurul axei sale de simetrie orizontale. Forţele care acţionează asupra lui sînt greutatea $\vec{G}$, reacţiunile normale $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ şi forţele de frecare avînd valorile μN_1 şi μN_2.

Pentru studiul mişcării se aplică teorema mişcării centrului de greutate, care conduce la ecuaţiile:

$$m\ddot{x}_C=-N_2\sin\alpha+N_1\sin\alpha-\mu N_2\cos\alpha-\mu N_1\cos\alpha=0 \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C=N_2\cos\alpha+N_1\cos\alpha-\mu N_2\sin\alpha+\mu N_1\sin\alpha-G=0, \quad (2)$$

şi teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotaţie

$$J_z\varepsilon=-\mu N_1 R-\mu N_2 R=-\mu R(N_1+N_2). \quad (3)$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) se obţine că

$$N_1+N_2=\frac{G}{\cos\alpha\left(1+\mu^2\right)}.$$

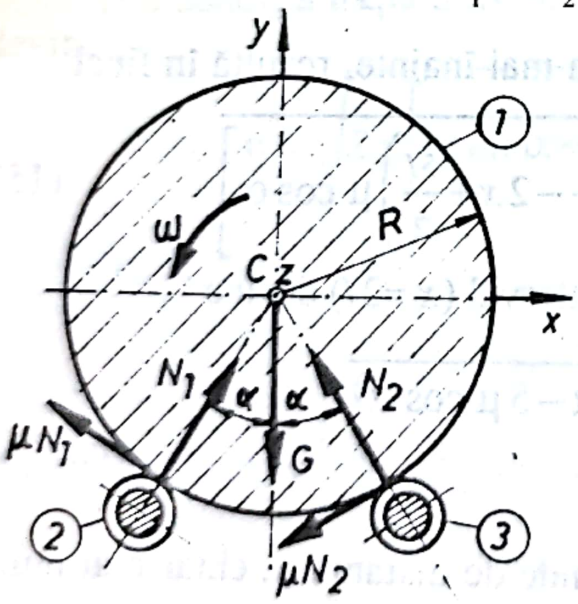


Fig. II.6

cu care ecuaţia (3) devine

$$J_z\varepsilon=-\mu R\frac{G}{\cos\alpha\left(1+\mu^2\right)}. \quad (4)$$

Înlocuind în această ecuaţie $J_z=\frac{mR^2}{2}=\frac{GR^2}{2g}$, rezultă acceleraţia unghiulară ε sub forma

$$\varepsilon=-\frac{2\mu g}{\left(1+\mu^2\right)R\cos\alpha}=-\varepsilon_0, \quad (5)$$

unde ε_0 este o constantă. Prin urmare din momentul în care rolele se opresc, mişcarea cilindrului devine uniform încetinită.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece la $t=0$, $\omega=\omega_0$, viteza unghiulară la momentul t este

$$\omega=-\varepsilon_0 t+\omega_0,$$

iar legea mişcării cilindrului

$$\theta=-\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}+\omega_0 t, \tag{7}$$

unde

$$\varepsilon_0=\frac{2\cdot 0{,}09\cdot 9{,}81}{\left(1+0{,}09^2\right)\cdot 0{,}6\cos 30^\circ}=3{,}371 \text{ rad/s}^2$$

2) Timpul t_1 după care cilindrul se opreşte se determină din ecuaţia $\omega=0$:

$$t_1=\frac{\omega_0}{\varepsilon_0}=\frac{5{,}6}{3{,}371}=1{,}66 \text{ s}.$$

Unghiul de rotaţie θ_1 pînă la oprire se obţine înlocuind în legea de mişcare (7) $t=t_1$:

$$\theta_1=-\frac{3{,}371}{2}\,1{,}66^2+5{,}6\cdot 1{,}66=4{,}6514 \text{ rad}.$$

2.7.* Bara AB se mişcă odată cu discul, pe care se află, efectuînd o mişcare de rotaţie în jurul unei axe verticale fixe. Forţele care acţionează asupra barei în planul mişcării sînt: forţa elastică, avînd valoarea $F_e=k\,\Delta l$, reacţiunea N a opritorului şi cele două componente X_A şi Y_A ale reacţiunii din articulaţia A (fig.II.7).

Pentru rezolvarea problemei se aplică teorema mişcării centrului de greutate, care conduce la ecuaţiile

$$ml_3\,\varepsilon=X_A \tag{1}$$

$$ml_3\,\omega^2=F_e-N+Y_A, \tag{2}$$

şi teorema momentului cinetic în raport cu axa verticală ce trece prin centrul de greutate al barei, care se exprimă prin relaţia matematică

$$J\varepsilon=Y_A\,l_1+Nl_2-Fl_1, \tag{3}$$

unde $J=\dfrac{m(2l_1)^2}{12}=\dfrac{ml_1^2}{3}$

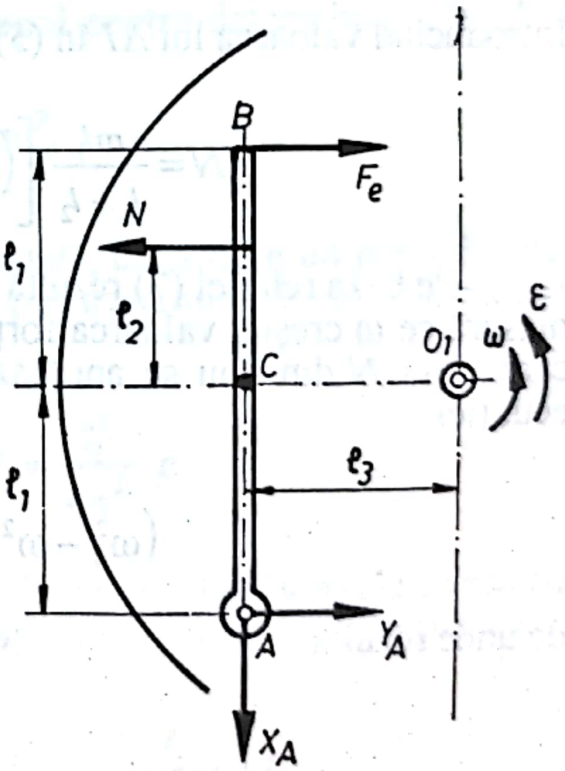


Fig.II.7

1) Din cele trei ecuaţii obţinute pot fi determinate forţele de legătură N, X_A şi Y_A în funcţie de ω şi ε. Astfel, din ecuaţiile (2) şi (3) eliminînd Y_A, se poate determina forţa N:

$$N=\frac{1}{l_1+l_2}\left(2F_e l_1 - ml_1 l_3 \omega^2 + J\varepsilon\right). \tag{4}$$

Înlocuind în (4) valorile lui F_e şi J, expresia devine

$$N=\frac{l_1}{l_1+l_2}\left(2k\Delta l - ml_3\omega^2 + \frac{ml_1}{3}\varepsilon\right). \tag{5}$$

2) Făcînd în (5), $N=0$, $\omega=\omega_0=\frac{\pi n_0}{30}$ şi $\varepsilon=0$, rezultă

$$2k\Delta l - ml_3\omega_0^2=0, \tag{6}$$

de unde

$$\Delta l=\frac{ml_3\omega_0^2}{2k}. \tag{7}$$

Introducînd valoarea lui Δl în (5), se obţine:

$$N=\frac{ml_1}{l_1+l_2}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)l_3+\frac{l_1}{3}\varepsilon\right].$$

Pe baza relaţiei (7) rezultă că în cazul $\varepsilon>0$ pentru $\omega=\omega_0$, $N>0$. Pe măsură ce ω creşte, valoarea forţei scade şi astfel există o valoare ω_1 la care forţa N din nou se anulează. Viteza unghiulară ω_1 este rădăcina ecuaţiei

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)l_3+\frac{l_1}{3}\varepsilon=0,$$

de unde rezultă

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+\frac{l_1}{3l_3}\varepsilon}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Aplicaţia numerică:

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 800}{30} = 83{,}776 \text{ rad/s}$$

$$\Delta l = \frac{0{,}01 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 83{,}776^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^3} = 3{,}51 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Observaţie: Teorema momentului cinetic se putea aplica şi în raport cu axa fixă de rotaţie, ce trece prin punctul O_1.

2.8.

1) $l_r = \frac{3}{2} R = 22{,}5$ cm; $\quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} = 0{,}951$ s.

2) $d = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; $\quad l_{r_{min}} = R\sqrt{2} = 21{,}21$ cm; $\quad T_{min} = 0{,}924$ s.

2.9. Întîi se calculează momentul de inerţie J_z al roţii în raport cu axa de rotaţie $\left(T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mgd}} \right)$, iar apoi pentru determinarea lui J se aplică formula lui Steiner. J=0,0493 kgm^2.

2.10. Biela, avînd axa fixă orizontală, constituie un pendul fizic. Cunoscînd perioadele de oscilaţie, se pot determina lungimile reduse corespunzătoare ale pendulului:

$$l_1 = \frac{T_1^2}{4\pi^2} g; \qquad l_2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2} g.$$

Notînd cu d_1 şi d_2 distanţele dintre centrul de greutate C şi axele de rotaţie şi cu J_1, J_2 momentele de inerţie în raport cu aceste axe, se pot scrie relaţiile:

$$d_1 + d_2 = d; \qquad \frac{J_1}{Md_1} = l_1; \qquad \frac{J_2}{Md_2} = l_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform formulei lui Steiner

$$J_1 = J + Md_1^2 \qquad \text{şi} \qquad J_2 = J + Md_2 .$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut, rezultă:

$$d_1 = \frac{d(d-l_2)}{2d-l_1-l_2}; \qquad d_2 = \frac{d(d-l_1)}{2d-l_1-l_2}$$

$$J = \frac{Md(d-l_1)(d-l_2)(l_1+l_2-d)}{(2d-l_1-l_2)^2}.$$

Rezultate numerice

$$l_1 = 0{,}2245 \text{ m}; \quad l_2 = 0{,}179 \text{ m}; \quad d_1 = 0{,}179 \text{ m};$$

$$d_2 = 0{,}082 \text{ m}; \quad J = 0{,}01297 \text{ kgm}^2.$$

2.11

1) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l^2+2\alpha x^2}{l+2\alpha x}\frac{1}{g}}.$$

2) $$x = \frac{2}{3}l.$$

3) $$x = \frac{l}{2\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{4}{3}\alpha}-1\right), \qquad T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{4}{3}\alpha}-1\right)}.$$

2.12*

1) Perioada micilor oscilaţii se determină cu relaţia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}, \qquad l_r = \frac{J_z}{Md}, \tag{1}$$

unde: M reprezintă masa pendulului fizic,
J_z – momentul de inerţie al pendulului în raport cu axa de rotaţie, iar
l_r – lungimea lui redusă.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu $J_{z'}$ momentul de inerţie în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate şi este paralelă cu axa de rotaţie, avem conform formulei lui Steiner $J_z = J_{z'} + Md^2$ şi astfel

$$l_r = \frac{J_{z'} + Md^2}{Md} = \frac{J_{z'}}{Md} + d. \qquad (2)$$

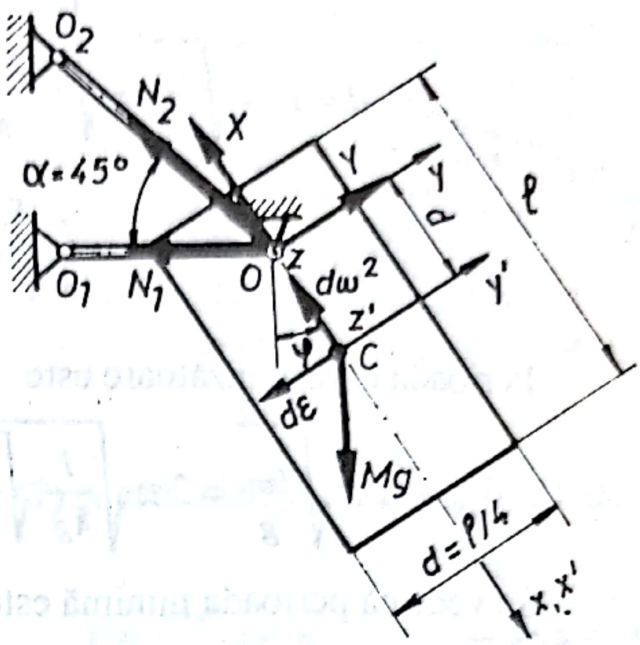


Fig.II. 12.1

Relaţia (2) arată că lungimea redusă a pendului fizic este funcţie de distanţa d şi se modifică odată cu aceasta.

Perioada micilor oscilaţii, dată de relaţia (1), devine minimă pentru valoarea lui d pentru care lungimea redusă (2) este minimă. Pentru a determina minimul funcţiei (2), se egalează cu zero derivata acesteia în raport cu d.

$$l_r' = -\frac{J_{z'}}{M}\frac{1}{d^2} + 1 = 0, \qquad (3)$$

de unde

$$d = \sqrt{\frac{J_{z'}}{M}} = i_{z'}. \qquad (4)$$

Deci, valoarea lui d pentru care lungimea redusă (şi în acelaşi timp perioada) este minimă coincide cu raza de inerţie, corespunzătoare axei ce trece prin centrul de greutate al pendulului.

Lungimea redusă minimă se obţine înlocuind în (2) valoarea (4) a lui d şi rezultă:

$$l_{r_{min}} = 2\sqrt{\frac{J_{z'}}{M}} = 2\,i_{z'}. \qquad (5)$$

Aceste rezultate sînt valabile pentru orice pendul fizic. (Ele pot fi aplicate şi pentru pendulele fizice din problemele 2.8 şi 2.11.)

În cazul plăcii dreptunghiulare din enunţ (fig. II.12.1)

$$J_{z'} = J_{x'} + J_{y'} = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Ml^2}{12} = \frac{M}{12}\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{Ml^2}{12} = \frac{17}{192}Ml^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$d = i_{z'} = \sqrt{\frac{J_{z'}}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{17}{192} M l^2}{M}} = \frac{l}{8}\sqrt{\frac{17}{3}} = 0{,}2975\ l,$$

$$l_{r_{min}} = 2\, i_{z'} = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{17}{3}} = 0{,}595\ l.$$

Perioada corespunzătoare este

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{r_{min}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}\sqrt{\frac{17}{3}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}\sqrt{\frac{17}{3}}} \approx 1{,}547\ l.$$

Se vede că perioada minimă este funcţie numai de l. $T_{min}=1s$, dacă $l=0{,}646$ m.

2) Pentru a putea determina eforturile din cele două bare, se determină în prealabil componentele X şi Y ale reacţiunii din articulaţia O, indicate în fig. II.12.1. În acest scop se aplică teorema mişcării centrului de greutate, care conduce la ecuaţiile:

$$-Md\omega^2 = -X + Mg\cos\varphi, \quad -Md\varepsilon = Y - Mg\sin\varphi$$

din care

$$X = Mg\cos\varphi + Md\omega^2 \tag{6}$$

$$Y = Mg\sin\varphi - Md\varepsilon. \tag{7}$$

Din teorema energiei cinetice, aplicată între poziţia iniţială şi cea considerată, $J_z\frac{\omega^2}{2} = Mg\,\mathrm{d}\cos\varphi$, rezultă

$$\omega^2 = \frac{2\,Mgd}{J_z}\cos\varphi,$$

iar din teorema momentului cinetic $J_z\varepsilon = M_z = Mgd\sin\varphi$,

$$\varepsilon = \frac{Mgd}{J_z}\sin\varphi, \tag{9}$$

unde

$$J_z = J_{z'} + Md^2 = \frac{17}{192} Ml^2 + M\frac{l^2}{64}\frac{17}{3} = \frac{17}{96} Ml^2. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

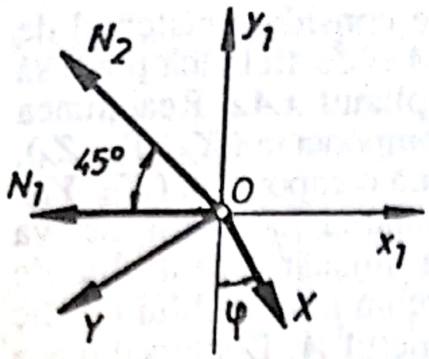


Fig. II.12.2

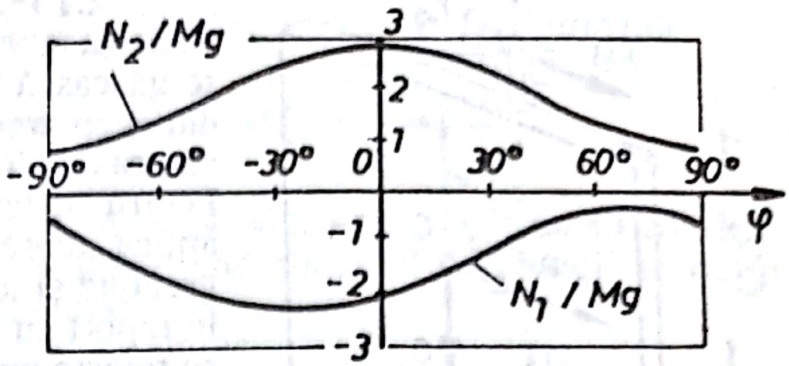


Fig. II.12.3

Înlocuind (8) în (6) şi (9) în (7) şi efectuînd calculele, ţinînd seama de (10), rezultă

$$X=2\,Mg\,\cos\varphi\,,\qquad Y=\frac{Mg}{2}\sin\varphi\,. \tag{11}$$

Acum, pentru determinarea eforturilor N_1 şi N_2 se scriu ecuaţiile de echilibru pentru forţele concurente în O (fig. II.12.2):

$$\sum X_1=-N_1-N_2\,\frac{\sqrt{2}}{2}+X\sin\varphi-Y\cos\varphi=0 \tag{12}$$

$$\sum Y_1=0+N_2\,\frac{\sqrt{2}}{2}-X\cos\varphi-Y\sin\varphi=0\,, \tag{13}$$

din care se pot determina cele două necunoscute:

$$N_1=\frac{Mg}{2}\left(3\cos\varphi\sin\varphi+3\sin^2\varphi-4\right) \tag{14}$$

$$N_2=\frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(4-3\sin^2\varphi\right). \tag{15}$$

Pentru a putea urmări modul cum variază cele două eforturi, relaţiile (14) şi (15) s-au reprezentat grafic în fig. II.12.3. Se vede că efortul N_2 este pozitiv (bara O_2O este supusă la întindere), pe cînd efortul N_1 este negativ (compresiune) în tot timpul mişcării.

Efortul N_2 devine maxim pentru $\varphi=0$ ($N_{2max}=2{,}828\,Mg$), iar N_1 are un minim pentru $\varphi=-22{,}5°$ ($N_{1min}=-2{,}31\,Mg$) şi un maxim pentru $\varphi=67{,}5°$ ($N_{1max}=-0{,}189\,Mg$).

Scanned with OKEN Scanner

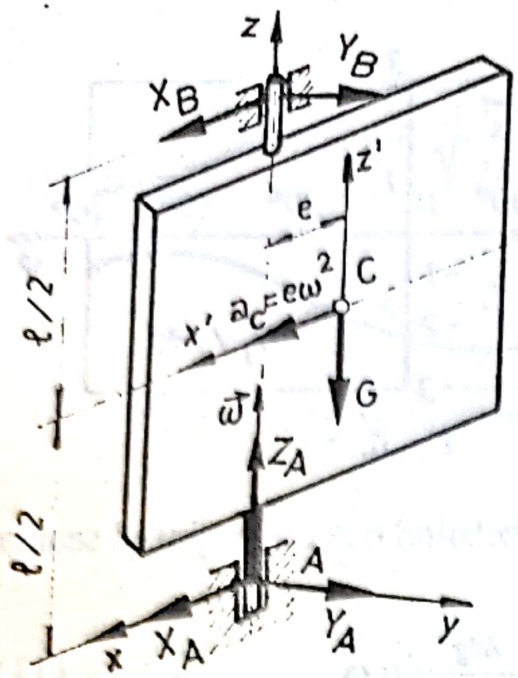


Fig.II.13

2.13*. Se consideră sistemul de referinţă mobil $Axyz$ astfel încît placa să se găsească în planul xAz. Reacţiunea din A are trei componente (X_A, Y_A, Z_A), iar cea din B două componente (X_B, Y_B). Pentru determinarea acestora se va aplica teorema mişcării centrului de greutate şi teorema momentului cinetic în raport cu punctul A. Deoarece placa se roteşte uniform, acceleraţia centrului ei de greutate C are doar componentă normală ($a=e\omega^2$). Astfel, teorema mişcării centrului de greutate conduce la următoarele ecuaţii scalare:

$$M e \omega^2 = X_A + X_B \qquad (1)$$

$$0 = Y_A + Y_B \qquad (2)$$

$$0 = -G + Z_B \qquad (3)$$

Momentul cinetic al plăcii în raport cu punctul A este

$$\vec{K}_A = -J_{xz}\,\omega\,\vec{i} - J_{yz}\,\omega\,\vec{j} + J_z\,\omega\,\vec{k},$$

unde $J_{yz} = 0$ şi ω este constant.

Se calculează derivata momentului cinetic în raport cu timpul:

$$\dot{\vec{K}}_A = -J_{xz}\,\omega\,\dot{\vec{i}} = -J_{xz}\,\omega\,\vec{\omega} \times \vec{i} = -J_{xz}\,\omega^2\,\vec{j}.$$

Singura forţă direct aplicată este greutatea $\vec{G}$ şi momentul acesteia în raport cu punctul A este $\vec{M}_{d_A} = -Ge\vec{j}$.

Dintre forţele de legătură numai reacţiunea din B are moment în raport cu punctul A, acesta fiind

$$\vec{M}_{l_A} = \overrightarrow{AB} \times \vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & l \\ X_B & Y_B & 0 \end{vmatrix} = -Y_B\,l\,\vec{i} + X_B\,l\,\vec{j}.$$

Conform teoremei momentului cinetic $\dot{\vec{K}}_A = \vec{M}_{d_A} + \vec{M}_{l_A}$. Proiectînd această relaţie pe axele Ax şi Ay, se obţin următoarele ecuaţii scalare:

$$0 = -Y_B l \qquad (4) \qquad -J_{xz}\,\omega^2 = X_B l - Ge. \qquad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul de inerție centrifugal J_{xz} se poate calcula în felul următor:

$$J_{xz} = J_{x'z'} + M x_C y_C = 0 + M(-e)\frac{l}{2} = -\frac{Mel}{2}.$$

Ecuațiile (1) – (3) împreună cu (4) și (5) constituie un sistem de 5 ecuații cu cinci necunoscute. Rezolvînd sistemul de ecuații se obțin componentele forțelor de legătură:

$$X_A = \frac{Me\omega^2}{2} - \frac{Mge}{l}, \qquad Y_A = 0, \qquad Z_A = Mg,$$

$$X_B = \frac{Me\omega^2}{2} - \frac{Mge}{l}, \qquad Y_B = 0.$$

Cu datele numerice ale problemei rezultă: $X_A = 390$ N; $Z_A = 588{,}6$ N; $X_B = 474$ N.

2.14.

1) $$E_C = \frac{1}{24}\frac{G}{g} l^2 \omega^2 \sin^2 \alpha = 61{,}98 \text{ J}.$$

2) $$R_A = \frac{G}{2} + \frac{Gl^2}{24\, gd} \omega^2 \sin 2\alpha = 167{,}245 \text{ N},$$

$$R_B = \frac{G}{2} - \frac{Gl^2}{24\, gd} \omega^2 \sin 2\alpha = -78{,}955 \text{ N}.$$

2.15.

$$R_A = \frac{Mg}{2} + \frac{(J_X - J_Z)\,\omega^2 \sin 2\alpha}{2l} = 4627{,}947 \text{ N},$$

$$R_B = \frac{Mg}{2} - \frac{(J_X - J_Z)\,\omega^2 \sin 2\alpha}{2l} = -3941{,}247 \text{ N},$$

unde

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 100\,\pi \text{ rad/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.16.

1) $T = \dfrac{mgR}{d\cos\alpha} = 28{,}319$ N; $\quad X_0 = T\cos\alpha = 24{,}525$ N;

$$Y_0 = (m+M)\,g + T\sin\alpha = 92{,}637 \text{ N}.$$

2) $$a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}\,g = 3{,}924 \text{ m/s}^2.$$

3) $t = 0{,}382$ s; $\quad s = 0{,}2863$ m.

4) $T_1 = m(g-a) = 11{,}772$ N.

2.17.

1) În cazul mişcării uniforme, forţele ce acţionează asupra tamburului prin intermediul cablului sînt P şi Q. Momentul QR al forţei Q în raport cu axa de rotaţie se opune mişcării (moment rezistent), iar momentul PR este activ. Momentul dezvoltat de motor trebuie să aibă valoarea

$$M_1 = QR - PR = (Q-P)R = (6500 - 1500)\times 0{,}2 = 1000 \text{ Nm}. \qquad (1)$$

Cunoscînd viteza v_1 de deplasare a corpurilor, se poate calcula viteza unghiulară ω_1 a tamburului:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{1{,}2}{0{,}2} = 6 \text{ rad/s}. \qquad (2)$$

Puterea mecanică necesară este:

$$P_1 = M_1\omega_1 = 1000\times 6 = 6\,000 \text{ W } (6 \text{ kW}). \qquad (3)$$

2) În timpul pornirii mişcarea este uniform accelerată, acceleraţia celor două corpuri fiind $a = \dfrac{v_1}{t_1} = \dfrac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8\ \dfrac{m}{s^2}$.

Momentul necesar în timpul pornirii este

$$M = (Q-P)\,R + \frac{a}{R}\left(J_z + \frac{P}{g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2\right) = 1133{,}97 \text{ Nm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea $P = M\omega$ creşte în intervalul de timp $[0, t_1]$, valoarea ei maximă fiind

$P_{max} = M\omega_1 = 1133{,}87 \times 6 = 6\,803{,}27$ W.

În fig. II.17, *a*, *b* şi *c* sînt reprezentate diagramele $\omega = \omega(t)$, $M = M(t)$ şi $P = P(t)$ în timpul pornirii mecanismului.

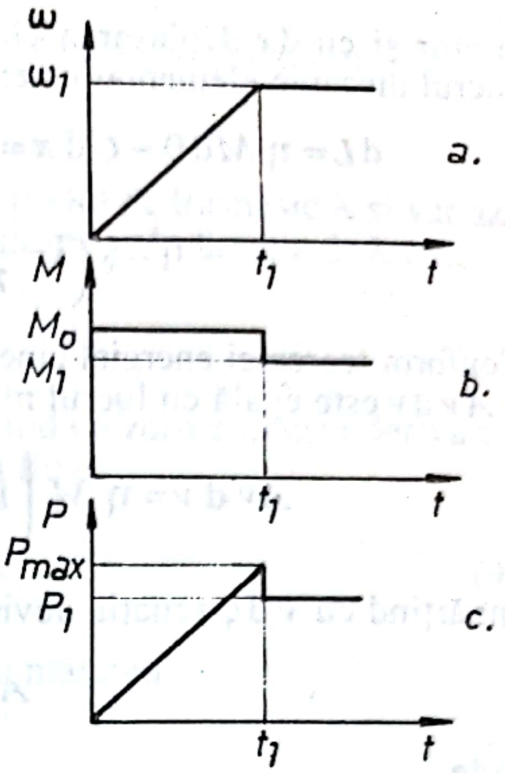


Fig. II.17

2.18*.

1) Pentru rezolvarea problemei se va aplica teorema energiei cinetice sub formă diferenţială. Energia cinetică a sistemului este

$$E_C = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v^2.$$

Din egalitatea $v = \omega_2 r$ rezultă, $\omega_2 = \frac{v}{r}$, iar din egalitatea $\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\omega_1 = \frac{1}{\lambda}\omega_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{v}{r}$. În felul acesta se poate exprima energia cinetică numai în funcţie de viteza v:

$$E_C = \frac{1}{2} J_1 \frac{1}{\lambda^2 r^2} v^2 + \frac{1}{2} J_2 \frac{1}{r^2} v^2 + \frac{m v^2}{2} = A\frac{v^2}{2},$$

unde

$$A = \frac{1}{\lambda^2 r^2} J_1 + \frac{1}{r^2} J_2 + m.$$

Lucrul mecanic se efectuează de către momentul motor M, forţele (cuplurile) de frecare şi greutatea G. De lucrul mecanic (pasiv) al forţelor de frecare se ţine seamă înmulţind lucrul mecanic al momentului motor cu randamentul η. Astfel, notînd cu $d\theta$ unghiul de rotaţie elementar al axului

motor şi cu dx deplasarea elementară corespunzătoare a greutăţii G, lucrul mecanic elementar este:

$$dL = \eta M d\theta - G dx = \eta M_0 (1 - k\omega_1)\omega_1 dt - mgv dt =$$

$$= \eta M_0 \left(1 - \frac{k}{\lambda r} v\right) \frac{1}{\lambda r} v dt - mgv\, dt.$$

Conform teoremei energiei cinetice, diferenţiala energiei cinetice $d(E_c) = Av\, dv$ este egală cu lucrul mecanic elementar, deci

$$Av\, dv = \eta M_0 \left(1 - \frac{k}{\lambda r} v\right) \frac{1}{\lambda r} v dt - mgv\, dt.$$

Împărţind cu $v\, dt$, ecuaţia devine

$$A\dot{v} + Bv = C, \tag{1}$$

unde

$$B = \eta M_0 \frac{k}{\lambda^2 r^2}, \qquad C = \eta M_0 \frac{1}{\lambda r} - mg.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare (1) este de forma

$$v = C_1 e^{-\frac{B}{A}t} + \frac{C}{B}.$$

Din condiţia că la $t = 0$, $v = 0$, rezultă pentru constanta de integrare valoarea $C_1 = -\frac{C}{B}$, iar legea vitezei devine:

$$v = \frac{C}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{A}t}\right) = v_C\left(1 - e^{-\frac{B}{A}t}\right). \tag{2}$$

Pe baza relaţiei obţinute rezultă că viteza tinde asimptotic către valoarea

$$v_C = \frac{C}{B} = \frac{\eta M_0 \frac{1}{\lambda r} - mg}{\eta M_0 \frac{k}{\lambda^2 r^2}} = \frac{\lambda r}{k} - \frac{mgr^2}{\eta M_0 k}\lambda^2. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a putea ridica corpul este necesar să avem $v_C>0$, condiţie verificată dacă $M_0 > \frac{mgr\lambda}{\eta}$.

2) Viteza limită v_C este funcţie de raportul de trasmisie λ şi variază parabolic în funcţie de aceasta. Derivata vitezei v_C în funcţie de λ este

$$\frac{\mathrm{d}\, v_C}{\mathrm{d}\,\lambda} = \frac{r}{k} - 2\,\frac{mgr^2}{\eta M_0 k}\,\lambda .$$

Rădăcina ecuaţiei, ce se obţine egalînd cu zero expresia derivatei, reprezintă valoarea optimă a lui λ, aceasta fiind

$$\lambda_{opt} = \frac{\eta M_0}{2\,mgr}. \qquad (4)$$

Pentru această valoare a lui λ viteza v_C este maximă:

$$v_{C\,max} = \frac{\eta M_0}{4\,mgk}.$$

Este interesant de observat că valoarea vitezei maxime nu depinde de raza r a tobei.

2.19.

$$M > \frac{r_1}{r_2} Q R. \qquad (1)$$

$$a = \frac{\frac{M}{R}\,\frac{r_2}{r_1} - Q}{\frac{J_1}{R^2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{J_2}{R^2} + \frac{Q}{g}}. \qquad (2)$$

$$T = Q + \frac{Q}{g} a. \qquad (3)$$

2.20

1) $$a = \frac{\frac{M}{R} - G\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}{\frac{J}{R^2} + \frac{G}{g}} \approx 0{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) $t_1 = 3$ s, $s_1 = 2{,}25$ m.

3) $T = \frac{G}{g} a + G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 318{,}785$ N.

4) $M_1 = GR(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 293{,}301$ Nm.

$$P_1 = M_1 \frac{v_1}{R} = 2\,933{,}01 \text{ W}.$$

2.21*.

1) Din momentul inițial pînă ajunge pe planul orizontal, discul efectuează mișcare plan-paralelă.

S-a notat cu C_1 poziția centrului de greutate în momentul inițial, cu C_2 în momentul cînd părăsește planul înclinat și cu C_3 în momentul în care atinge planul orizontal.

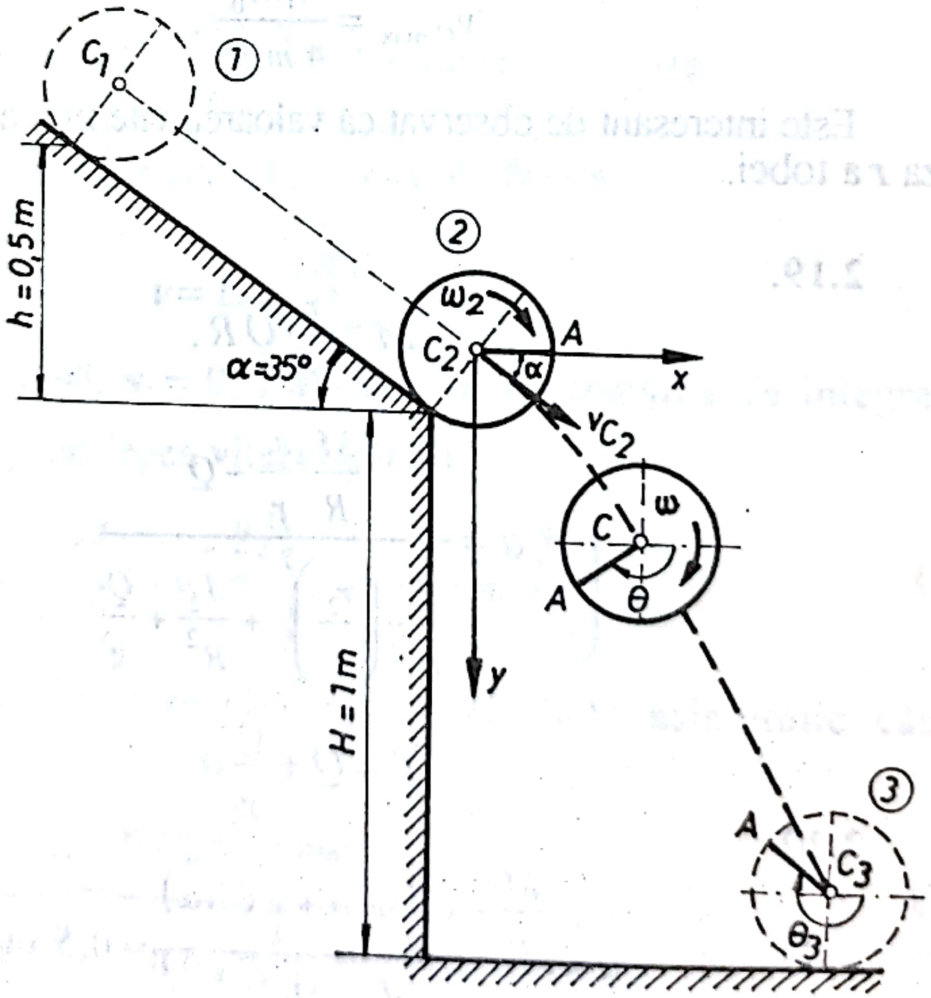


Fig. II. 21.

Pentru a determina viteza v_{C_2} şi viteza unghiulară corespunzătoare ω_2 se poate aplica teorema energiei cinetice între poziţiile 1 şi 2:

$$E_{C_2} - E_{C_1} = L_{1-2}. \tag{1}$$

Avem $E_{C_1} = 0$, iar

$$E_{C_2} = \frac{Mv_{C_2}^2}{2} + \frac{J_z\omega_2^2}{2},$$

unde

$$J_z = \frac{MR^2}{2} \quad \text{şi} \quad \omega_2 = \frac{v_{C_2}}{R}.$$

Astfel

$$E_{C_2} = \frac{3}{4} Mv_{C_2}^2. \tag{2}$$

Singura forţă care efectuează lucru mecanic fiind greutatea,

$$L_{1\text{-}2} = Mgh. \tag{3}$$

Înlocuind (2) şi (3) în (1), rezultă:

$$\frac{3}{4} Mv_{C_2}^2 = Mgh,$$

de unde

$$v_{C_2} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}9{,}81 \cdot 0{,}5} = 2{,}557 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

şi

$$\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{R} = \frac{2{,}557}{0{,}15} = 17{,}046 \text{ rad/s}.$$

2) Pentru studiul mişcării discului în continuare se aplică teorema mişcării centrului de greutate şi teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotaţie ce trece prin centrul de greutate al discului:

Conform primei teoreme, centrul de greutate C se mişcă ca un punct material greu aruncat din C_2 cu viteza iniţială v_{C_2} sub unghiul α faţă de

Scanned with OKEN Scanner

orizontală (fig. II.21). În raport cu sistemul de referinţă xC_2y, indicat în figură, legea mişcării punctului C este

$$x = v_{C_2} \cos \alpha t \tag{4}$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_{C_2} \sin \alpha t, \tag{5}$$

iar ecuaţia traiectoriei

$$y = \frac{g}{2 v_{C_2}^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha. \tag{6}$$

Ordonata punctului C_3 este

$$y_{C_3} = H - R + R \cos \alpha. \tag{7}$$

Intersectînd parabola (6) cu dreapta $y=y_{C_3}$, se obţine abscisa x_{C_3}, apoi pe baza relaţiei (4) se poate calcula şi durata t_3 a mişcării libere a discului.

Teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotaţie ce trece prin centrul de greutate al discului se exprimă prin relaţia

$$J_z \ddot{\theta} = M_z$$

Deoarece singura forţă ce acţionează este greutatea $\vec{Mg}$ şi momentul acesteia este nul, rezultă

$$\ddot{\theta}=0, \quad \dot{\theta}=C=\omega_2, \quad \theta=\omega_2 t. \tag{8}$$

Prin urmare, în timp ce centrul de greutate al discului se mişcă pe parabola (6), discul se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω_2 în jurul axei ce trece prin centrul lui de greutate. Cunoscînd timpul t_3 se poate calcula unghiul θ_3 cu care se roteşte discul în mişcarea sa liberă, $\theta_3=\omega_2 t_3$, iar numărul rotaţiilor complete N este

$$N = \frac{\theta_3}{2\pi}. \tag{9}$$

Cu datele numerice ale problemei rezultă

$$y_{C_3} = 1 - 0{,}15 + 0{,}15 \times 0{,}8192 = 0{,}973 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia pentru determinarea lui x_{C_3} este

$$\frac{9,81}{2}\cdot\frac{x_{C_3}^2}{2,557^2\cdot 0,8192^2}+0,7\,x_{C_3}=0,973,$$

sau după efectuarea calculelor

$$1,118\,x_{C_3}^2+0,7\,x_{C_3}-0,973=0.$$

Această ecuaţie are două rădăcini, dintre care una este negativă, deci nu prezintă interes, iar rădăcina pozitivă este x_{C_3}=0,67 m.

Pe baza relaţiei (4)

$$t_3=\frac{x_{C_3}}{v_{C_2}\cos\alpha}=\frac{0,67}{2,557\cdot 0,8192}=0,32\text{ s}.$$

Rezultă în continuare:

$$\theta_3=\omega_2 t_3=17,046\times 0,32=5,4547\text{ rad}$$

$$N=\frac{\theta_3}{2\pi}=\frac{5,4547}{2\pi}=0,868\text{ rotaţii}.$$

2.22*.

1) Asupra barei acţionează greutatea Mg şi cele două reacţiuni normale, N_A şi N_C. Cum lucrul mecanic al acestor forţe este nul, conform teoremei energiei cinetice, energia cinetică a barei rămîne constantă în decursul mişcării. Bara efectuînd mişcare plan-paralelă, energia ei cinetică se calculează cu relaţia

$$E_C=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2, \qquad (1)$$

unde J_C este momentul de inerţie al barei în raport cu axa de rotaţie ce trece prin centrul ei de greutate:

$$J_C=\frac{M(2l)^2}{12}=\frac{Ml^2}{3}.$$

Ducînd în A şi C perpendiculare pe vitezele acestor puncte, se obţine la intersecţia lor, centrul instantaneu de rotaţie I.

Scanned with OKEN Scanner

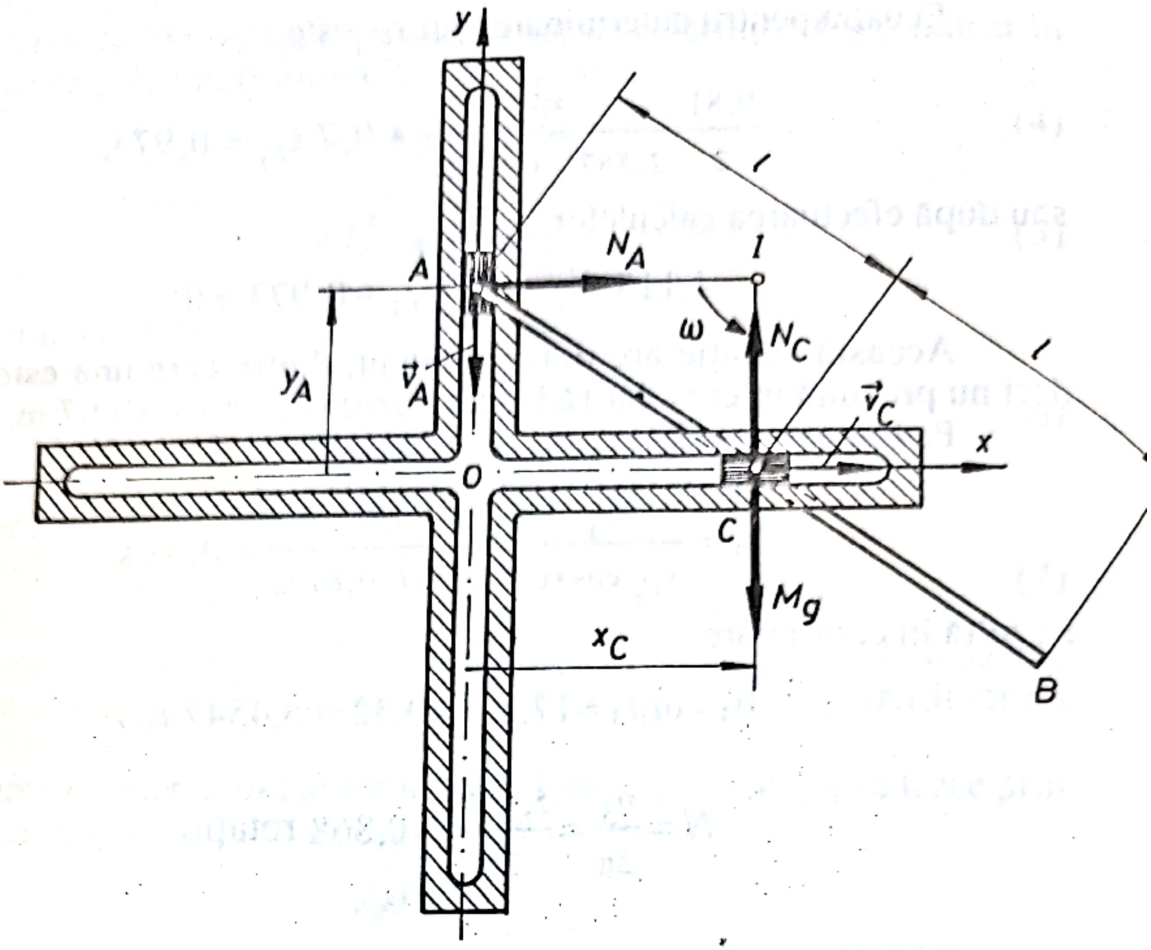


Fig. II.22.1

Din egalitatea

$$|v_C| = \omega IC = \omega \sqrt{l^2 - x_C^2}$$

rezultă

$$\omega = \frac{|v_C|}{\sqrt{l^2 - x_C^2}}. \tag{2}$$

Înlocuind acest rezultat în relaţia (1), expresia energiei cinetice devine:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \frac{v_C^2}{l^2 - x_C^2} = \frac{1}{2} M v_C^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l^2}{l^2 - x_C^2} \right),$$

sau

$$E_c = \frac{1}{6} M v_C^2 \frac{4l^2 - 3x_C^2}{l^2 - x_C^2}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum se pune condiția că energia cinetică a barei la un moment oarecare este egală cu energia ei cinetică în momentul inițial, cînd $x_C = \frac{l}{2}$ și $v_C = v_0$:

$$\frac{1}{6} M v_C^2 \frac{4l^2 - 3x_C^2}{l^2 - x_C^2} = \frac{1}{6} M v_0^2 \frac{4l^2 - 3\left(\frac{l}{2}\right)^2}{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

După simplificări și calcule simple rezultă din această egalitate

$$v_C^2 = \frac{13}{3} \cdot \frac{l^2 - x_C^2}{4l^2 - 3x_C^2} v_0^2, \tag{4}$$

de unde

$$v_C = \pm \sqrt{\frac{13}{3} \cdot \frac{l^2 - x_C^2}{4l^2 - 3x_C^2}}\, v_0. \tag{5}$$

Pe baza egalității (2) se poate determina acum și viteza unghiulară în funcție de x_C, rezultînd

$$\omega = \sqrt{\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{4l^2 - x_C^2}}\, v_0. \tag{6}$$

Rezultatele obținute pot fi exprimate cu ajutorul unor mărimi adimensionale, după cum urmează

$$\frac{v_C}{v_0} = \pm \sqrt{\frac{13}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x_C}{l}\right)^2}{4 - 3\left(\frac{x_C}{l}\right)^2}}, \tag{5'}$$

$$\frac{\omega}{\frac{v_0}{l}} = \sqrt{\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{4 - 3\left(\frac{x_C}{l}\right)^2}}. \tag{6'}$$

Scanned with OKEN Scanner

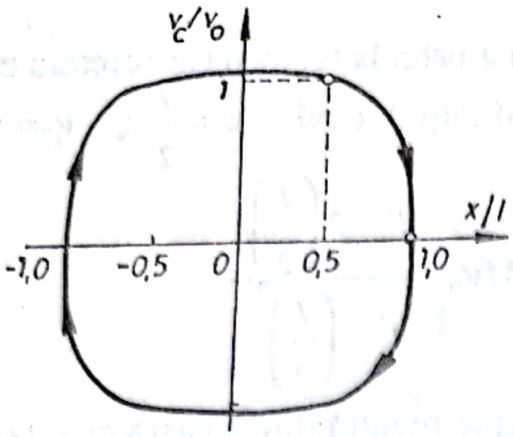


Fig. II.22.2

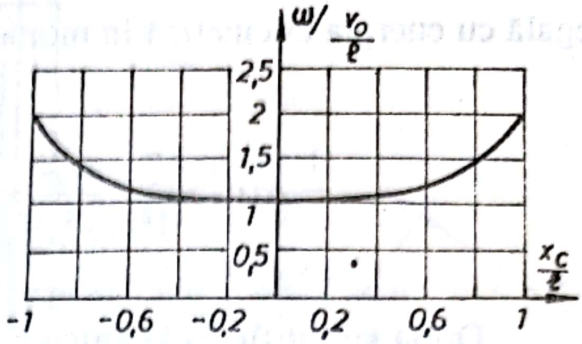


Fig. II.22.3

Reprezentînd grafic relaţia (5'), se obţine traiectoria de fază din fig. II.22.2. Este de remarcat faptul că deşi energia cinetică a barei este constantă, viteza centrului ei de greutate este funcţie de x_C.

Deoarece viteza se anulează pentru $x_C=l$ şi $x_C=-l$, centrul de greutate efectuează mişcare oscilatorie (nearmonică) pe axa Ox în jurul originii O. În acelaşi timp bara se roteşte cu viteza unghiulară ω, care variază între $\omega_{max}=\sqrt{\frac{13}{3}}\,\frac{v_0}{l}$ (pentru $x_C=\pm l$) şi $\omega_{min}=\sqrt{\frac{13}{12}}\cdot\frac{v_0}{l}$ (pentru $x_C=0$) (vezi relaţiile (6), (6') şi graficul din fig. II.22.3).

2) Pentru determinarea reacţiunilor N_A şi N_C se poate aplica teorema mişcării centrului de greutate, după care

$$M\vec{a}_C=\vec{M}g+\vec{N}_A+\vec{N}_C.$$

Proiectînd ecuaţia vectorială pe cele două axe, rezultă

$$M\ddot{x}_C=N_A; \qquad M\ddot{y}_C=N_C-Mg \tag{7}$$

Cum $\ddot{y}_C=0$, din ecuaţia a doua rezultă $N_C=Mg$.

Pentru a putea determina N_A, trebuie să se calculeze acceleraţia $a_C=\ddot{x}_C$ a centrului de greutate. Derivînd ambele părţi ale egalităţii (4) în raport cu timpul, se obţine

$$2v_C\dot{v}_C=\frac{13}{3}v_0^2\,\frac{-2x_C\left(4l^2-3x_C^2\right)+3\cdot 2x_C\left(l^2-x_C^2\right)}{\left(4l^2-3x_C^2\right)^2}\,\dot{x}_C,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde ($v_C=\dot{x}_C$)

$$\dot{v}_C = a_C = -\frac{13}{3}\cdot\frac{l^2 x_C}{\left(4l^2-3x_C^2\right)^2}v_0^2.$$

Înlocuind a_C în relaţia (7_1), rezultă

$$N_A = -\frac{13}{3}\cdot\frac{l^2 x_C}{\left(4l^2-3x_C^2\right)^2}Mv_0^2. \tag{8}$$

Deoarece $x_C = \pm\sqrt{l^2-y_A^2}$, reacţiunea N_A în funcţie de y_A este

$$N_A = \pm\frac{13}{3}\cdot\frac{l^2\sqrt{l^2-y_A^2}}{\left(l^2+3y_A^2\right)^2}Mv_0^2. \tag{9}$$

Folosind mărimi adimensionale, rezultatul se poate scrie sub forma

$$\frac{\frac{N_A}{Mv_0^2}}{\frac{}{l}} = \mp\frac{13}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y_A}{l}\right)^2}}{\left[1+3\left(\frac{y_A}{l}\right)^2\right]^2}. \tag{10}$$

Pe baza relaţiei (8) rezultă că N_A şi x_C au semne opuse; deci, semnul minus în membrul drept al egalităţii (10) corespunde lui $x_C>0$ (centrul de greutate C se află pe porţiunea pozitivă a axei Ox), iar semnul plus lui $x_C<0$.

Relaţia (10) este reprezentată grafic în fig. II.22.4. Se vede din relaţia (10) şi din grafic că reacţiunea N_A se anulează pentru $y_A=\pm l$ (în poziţiile extreme ale punctului A) şi ia valori extreme pentru $y_A=0$. Valoarea maximă este

$$N_{A\,max} = \frac{13}{3}\cdot\frac{Mv_0^2}{l}.$$

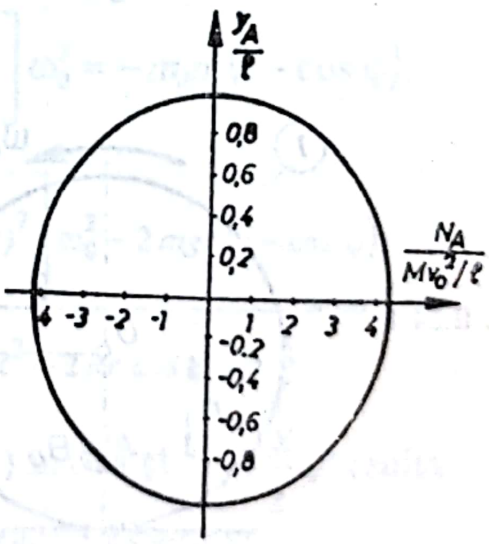


Fig. II.22.4

Scanned with OKEN Scanner

2.23.

1) $a_0 = \frac{2}{3}\frac{R+h}{R}\cdot\frac{P}{G}g$; 2) $T = \frac{R-2h}{3R}P$; 3) $\mu > \frac{P}{3G}$.

Cazuri particulare:

a) $h = 0$; $a_0 = \frac{2}{3}\frac{P}{G}g$; $T = \frac{1}{3}P$.

b) $h = \frac{R}{2}$; $a_0 = \frac{P}{G}g$; $T = 0$.

c) $h = R$; $a_0 = \frac{4}{3}\frac{P}{G}g$; $T = -\frac{1}{3}P$.

2.24*.

1) Pentru studiul mişcării discului se va aplica teorema energiei cinetice între poziţia iniţială notată cu 1 şi poziţia 2, corespunzătoare unghiului de rotaţie φ (fig. II.24.1).

Discul efectuează mişcare plan-paralelă, centrul instantaneu de rotaţie I fiind punctul de contact dintre disc şi dreapta pe care se rostogoleşte. Astfel, energia cinetică iniţială este

$$E_{C_1} = \frac{1}{2}\left[J_I + m(R-r)^2\right]\omega_0^2 \qquad (1)$$

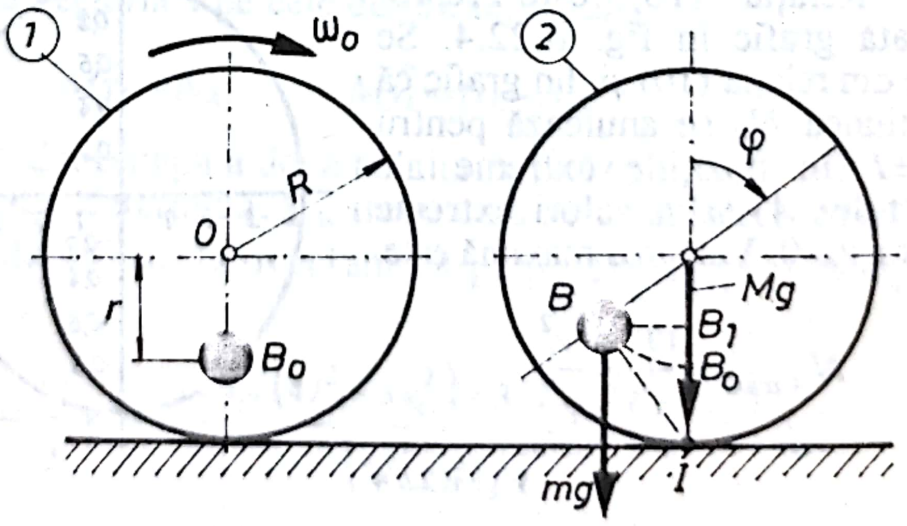


Fig. II.24.1

unde J_I reprezintă momentul de inerţie al discului (fără contragreutăţi) în raport cu axa instantanee de rotaţie care, conform, teoremei lui Steiner, este

$$J_I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}. \qquad (2)$$

Pentru a putea calcula energia cinetică în poziţia 2, trebuie determinată distanţa d dintre punctele B şi I în funcţie de unghiul φ. Din triunghiul dreptunghic IBB_1 rezultă

$$d^2 = IB^2 = IB_1^2 + BB_1^2 = (R - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2.$$

Astfel

$$E_{C_2} = \frac{1}{2}\left[J_I + md^2\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left[J_I + m\left(R^2 - 2R\cos\varphi + r^2\right)\right]\dot{\varphi}^2. \qquad (3)$$

Singura forţa care efectuează lucru mecanic este greutatea $\vec{mg}$ şi

$$L_{12} = -mgB_0B_1 = -mgr(1-\cos\varphi). \qquad (4)$$

Teorema energiei cinetice ($E_{C_2} - E_{C_1} = L_{12}$) conduce la egalitatea

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3MR^2}{2} + m\left(R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2\right)\right]\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R-r)^2\right]\omega_0^2 = -mgr\left(1-\cos\varphi\right), \qquad (5)$$

de unde

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R-r)^2\right]\omega_0^2 - 2mgr\left(1-\cos\varphi\right)}{\frac{3MR^2}{2} + m\left(R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2\right)}. \qquad (6)$$

2) Introducînd în egalitatea (6) $m = M$ şi $r = \frac{R}{2}$, rezultă

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{7R\omega_0^2 - 4g\left(1-\cos\varphi\right)}{11R - 4R\cos\varphi}, \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi astfel

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}\frac{7\frac{R}{g}\omega_0^2 - 4(1-\cos\varphi)}{11-4\cos\varphi}}. \qquad (8)$$

Reprezentînd grafic pe baza relaţiei (8) $\dot{\varphi}\sqrt{\frac{R}{g}}$ în funcţie de φ, pentru diferite valori ale parametrului $\lambda = \sqrt{\frac{R}{g}}\,\omega_0$, se obţin curbele (traiectoriile de fază) din fig. II.24.2.

Deoarece la început $\varphi=0$, toate curbele pornesc de pe axa ordonatelor şi viteza unghiulară scade în modul. Dacă viteza unghiulară iniţială este mică, $\dot{\varphi}$ se anulează pentru $\varphi<\pi$, după ce începe mişcarea în sens invers pînă se anulează din nou ş.a.m.d. În acest caz mişcarea discului este oscilatorie, iar traiectoriile de fază sînt curbe închise.

Punînd condiţia ca viteza unghiulară să nu se anuleze decît pentru $\varphi=\pi$, rezultă

$$\lambda = \omega_0\sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{\frac{8}{7}} = 1{,}069. \qquad (9)$$

Traiectoria de fază pentru acest caz limită s-a reprezentat prin linie-punct. Dacă viteza unghiulară iniţială este mai mare decît valoarea dată de (9), $\dot{\varphi}$ nu se mai anulează în decursul mişcării, discul se rostogoleşte într-un singur sens, însă neuniform. Traiectoriile de fază în acest caz sînt curbe deschise. Pe curbele din fig.II.24.2 s-a indicat prin săgeţi sensul de parcurgere al acestora.

3) Dacă viteza unghiulară iniţială este mică, discul poate efectua mici oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru. În acest caz, în partea stîngă a egalităţii (5) se poate face aproximaţia cos $\varphi=1$ (ceea ce înseamnă că $d \approx R-r$), iar în partea dreaptă

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{2},$$

cu care egalitatea devine

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R-r)^2\right]\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R-r)^2\right]\omega_0^2 = -mgr\frac{\varphi^2}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

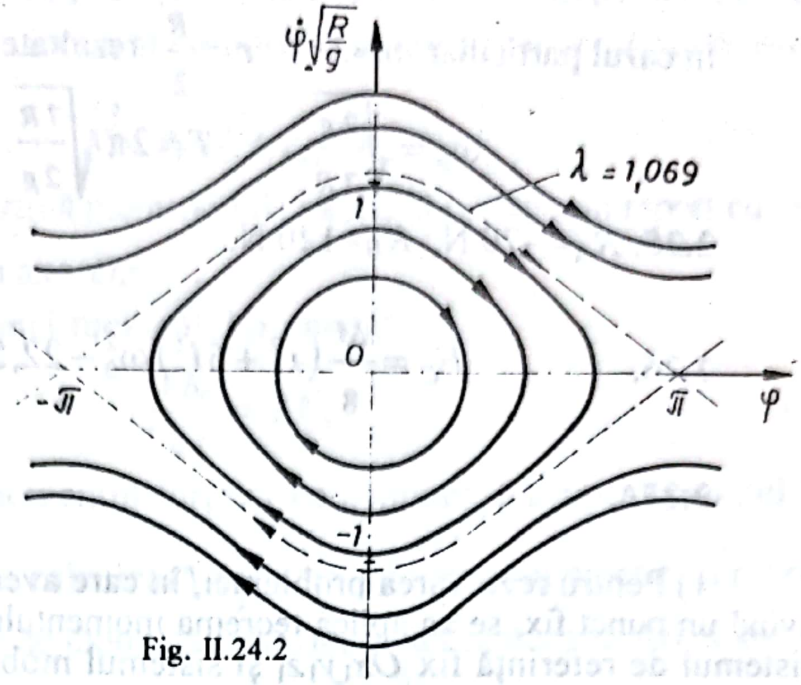


Fig. II.24.2

Derivînd acum ambele părţi ale acestei egalităţi în raport cu timpul, se obţine ecuaţia diferenţială a mişcării,

$$\frac{1}{2}2\left[\frac{3MR^2}{2}+m(R-r)^2\right]\dot{\varphi}\cdot\ddot{\varphi}=-mgr\,2\frac{1}{2}\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

care poate fi pusă sub forma

$$\left[\frac{3MR^2}{2}+m(R-r)^2\right]\ddot{\varphi}+mgr\,\varphi=0. \tag{10}$$

Ecuaţia obţinută arată că mişcarea este într-adevăr oscilatorie, pulsaţia, respectiv perioada acesteia, fiind

$$\omega_n=\sqrt{\frac{mgr}{\frac{3MR^2}{2}+m(R-r)^2}}, \tag{11}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3MR^2}{2}+m(R-r)^2}{mgr}}. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular $m=M$ şi $r=\frac{R}{2}$ rezultatele devin

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2g}{7R}}, \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{7R}{2g}}. \tag{13}$$

2.25. $R_A=-70$ N, $R_B=120$ N.

2.26. $$E_C=\frac{M}{8}\left(r^2+6l^2\right)\omega_0^2-22{,}5\ \text{J}.$$

2.27*.

1) Pentru rezolvarea problemei, în care avem de a face cu un corp avînd un punct fix, se va aplica teorema momentului cinetic. Se consideră sistemul de referinţă fix $Ox_1y_1z_1$ şi sistemul mobil legat de corp $Oxyz$. Axele Ox şi Oy care nu apar în fig.II.27 se află într-un plan perpendicular pe axa Oz. Intersecţia dintre acest plan şi planul fix x_1Oy_1 este axa nodurilor ON, caracterizată prin versorul $\vec{n}$. Notînd cu φ unghiul de rotaţie proprie în jurul axei Oz, rezultă $\omega_z=\dot{\varphi}=\omega_1$. Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ a corpului mai are o componentă după axa Oz_1, $\omega_{z_1}=\dot{\psi}$, deci

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\,\vec{k}+\dot{\psi}\vec{k}_1.$$

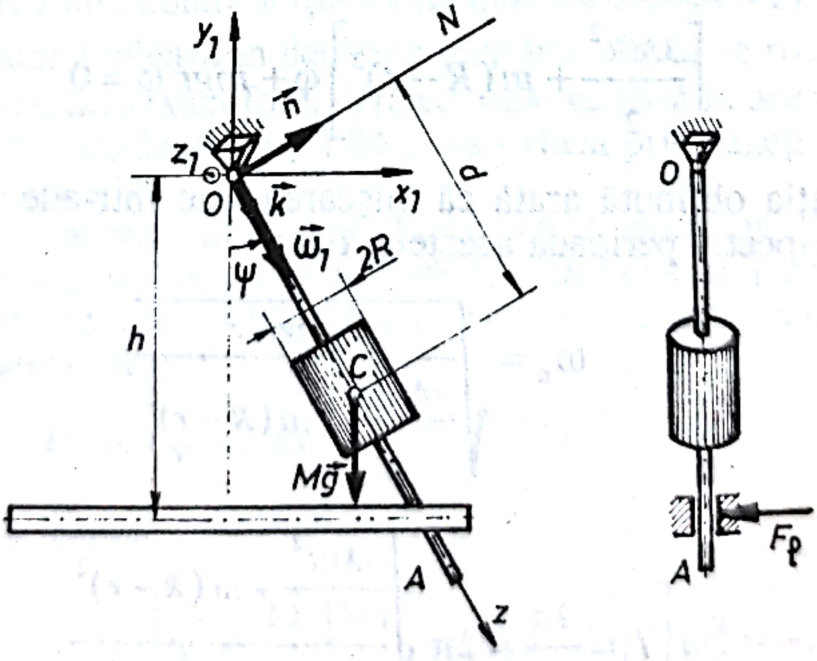


Fig. II.27

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece axele O_z şi Oz_1 sînt axe principale de inerţie în raport cu punctul O, momentul cinetic al cilindrului în raport cu acest punct este

$$\vec{K}_0 = J_z\dot{\varphi}\vec{k} + J_{z_1}\dot{\psi}\vec{k}_1,$$

unde $J_z = \frac{MR^2}{2}$ reprezintă momentul de inerţie al corpului în raport cu axa Oz, iar J_{z_1} în raport cu axa Oz_1.

Conform teoremei momentului cinetic

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0, \tag{1}$$

unde $\vec{M}_0$ reprezintă momentul forţelor ce acţionează asupra corpului în raport cu punctul O.

În continuare se calculează derivata momentului cinetic în raport cu timpul, ţinînd seamă de faptul că $\vec{k}$ este un vector unitar variabil şi $\dot{\vec{k}} = \dot{\psi}\vec{n}$. Rezultă

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = J_z\ddot{\varphi}\vec{k} + J_z\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{n} + J_{z_1}\ddot{\psi}\vec{k}_1. \tag{2}$$

Forţele care dau moment în raport cu punctul O sînt greutatea $\vec{Mg}$ şi forţa de legătură $\vec{F}_l$, perpendiculară pe ghidaj. Rezultă

$$\vec{M}_0 = -Mgd\sin\psi\,\vec{k}_1 + F_l\frac{h}{\cos\psi}\vec{n}. \tag{3}$$

Proiectînd ecuaţia vectorială (1) pe axele Oz, Oz_1 şi ON, ţinînd seama de (2) şi (3), se obţine următorul sistem de ecuaţii

$$J_z\ddot{\varphi} = 0 \tag{4}$$

$$J_{z_1}\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi \tag{5}$$

$$J_z\dot{\varphi}\dot{\psi} = F_l\frac{h}{\cos\psi}. \tag{6}$$

Pe baza ecuaţiei (4) rezultă $\dot{\varphi}=\omega_1=$constant. Ecuaţia (5) poate fi scrisă sub forma

$$J_{z_1}\ddot{\psi} + Mgd\sin\psi = 0, \tag{5'}$$

şi este ecuaţia diferenţială a mişcării de pendulare în jurul axei Oz_1.

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţia (5') se vede că această mişcare nu este influenţată de viteza unghiulară ω_1. Prin urmare, perioada micilor oscilaţii nu depinde de viteza unghiulară ω_1 $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{z_1}}{Mgd}}\right)$.

2) Valoarea forţei de legătură se determină din ecuaţia (6), din care rezultă,

$$F_l = \frac{J_z\dot{\varphi}\dot{\psi}}{h}\cos\psi = \frac{MR^2}{2h}\omega\dot{\psi}\cos\psi. \qquad (7)$$

Dacă la $t=0$, $\psi=\psi_0$ şi $\dot{\psi}=0$, legea mişcării de pendulare este $\psi = \psi_0\cos\sqrt{\frac{Mgd}{J_{z_1}}}\,t$ (oscilaţii mici) şi

$$\dot{\psi} = -\psi_0\sqrt{\frac{Mgd}{J_{z_1}}}\sin\sqrt{\frac{Mgd}{J_{z_1}}}\,t.$$

2.28.

a) $$N = Mg\cos^2\alpha = Mg\frac{l^2}{l^2+R^2} = 62{,}784\text{ N}.$$

b) În acest caz trebuie să se ţină seama şi de efectul cuplului giroscopic $\vec{M}_g$:

$$N_1 = \frac{M_g + Mgl\cos\alpha}{\sqrt{l^2+R^2}} = 879{,}264\text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. MECANICĂ ANALITICĂ

3.1. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

3.1.

1) Bara se roteşte uniform în jurul axei Δ cu viteza unghiulară $\omega=\omega_0$.

Reacţiunea din articulaţia A se află în planul determinat de bară şi axa Δ, avînd o componentă orizontală de mărime $X_A = M\frac{l}{2}\omega^2 \sin\alpha$ şi una verticală de mărime $Z_A = \frac{Mg}{2} + \frac{Ml}{3}\omega^2 \cos\alpha$, iar reacţiunea normală a planului orizontal este $N = \frac{Mg}{2} - \frac{Ml}{3}\omega^2 \cos\alpha$.

2) $N=0$ dacă $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\alpha}}$.

3.2.

$$X_A = 0, \quad Y_A = \frac{\omega^2 M \sin\alpha}{L}\left[bc - \cos\alpha\left(\frac{l^2}{12} + c^2\right)\right], \quad Z_A = Mg$$

$$X_B = 0, \quad Y_B = \frac{\omega^2 M \sin\alpha}{L}\left[ac + \cos\alpha\left(\frac{l^2}{12} + c^2\right)\right], \quad Z_B = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trei componente ale reacţiunilor sînt nule, iar Z_A are valoare constantă. Y_A şi Y_B în cazul $c=0$ (centrul de greutate C al barei se află pe axa de rotaţie) devin

$$Y_A = -\frac{\omega^2 l^2 M}{24L} \sin 2\alpha; \quad Y_B = -Y_A.$$

Prin urmare

$$|Y_A| = |Y_B| = \frac{\omega^2 l^2 M}{24L} \sin 2\alpha.$$

Pentru $\alpha=0$, cele două reacţiuni sînt nule. Apoi, dacă α creşte, cresc şi reacţiunile. Pentru $\alpha=45°$ rezultă o valoare maximă $\left(\frac{\omega^2 l^2 M}{24L}\right)$. În continuare reacţiunile scad şi pentru $\alpha=90°$ devin din nou nule.

3.3. Reacţiunile din lagăre sînt paralele cu axa Ay. Ele se compun din cîte o componentă statică (corespunzătoare vitezei unghiulare nule) $R_{A_0} = R_{B_0} = \frac{P}{2}$ şi cîte o componentă dinamică:

$$R_A = \frac{PR^2}{16\,ag} \omega^2 \sin 2\alpha = -R_B.$$

3.4*. Pentru rezolvarea problemei se va aplica principiul lui d'Alembert. În fig. III.4, *a, b, c* sînt reprezentate separat cele trei corpuri ale sistemului şi toate forţele şi momentele care intervin în principiul lui d'Alembert. Deoarece scripetele mic al troliului şi şaiba C au aceeaşi rază, cele două corpuri vor avea aceeaşi viteză unghiulară şi aceeaşi acceleraţie unghiulară.

În fig. III.4,*c*, M_{za} reprezintă momentul rezultant în raport cu axa de rotaţie Az al forţelor de rezistenţă datorită aerului care se calculează cu ajutorul integralei:

$$M_{za} = \int_{-b}^{+b} (k\omega x h\, \mathrm{d}x)\, x = k\omega h \int_{-b}^{+b} x^2\, \mathrm{d}x = k\omega h \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-b}^{+b} = \frac{2}{3} k\omega h b^3. \quad (1)$$

Momentul de inerţie al plăcii în raport cu axa de rotaţie se calculează de asemenea prin integrare

$$J_z = \int_{-b}^{+b} \rho x^2\, \mathrm{d}A,$$

unde

$$\rho = \frac{M}{2bh} = \frac{P}{2bhg}.$$

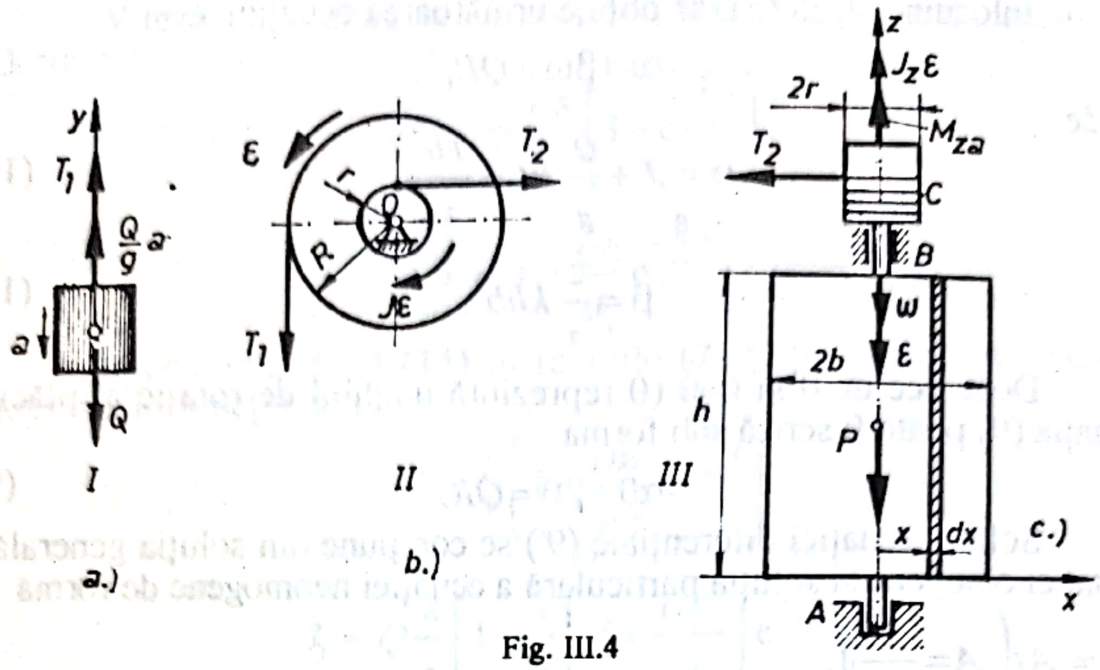


Fig. III.4

Rezultă

$$J_z = \int_{-b}^{+b} \rho x^2 h \, dx = \rho h \int_{-b}^{+b} x^2 \, dx = \rho h \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-b}^{+b} = \frac{2}{3}\rho h b^3 = \frac{Pb^2}{3g}. \quad (2)$$

Astfel, ecuaţiile de echilibru dinamic sînt

$$\text{(I)} \quad \sum Y_i = T_1 + \frac{Q}{g}a - Q = 0 \quad (3)$$

$$\text{(II)} \quad \sum M_{i0} = T_1 R - T_2 r - J\varepsilon = 0 \quad (4)$$

$$\text{(III)} \quad \sum M_{iz} = T_2 r - \frac{2}{3}khb^3\omega - \frac{Pb^2}{3g}\varepsilon = 0. \quad (5)$$

La acestea se adaugă relaţia cinematică

$$a = \varepsilon R. \quad (6)$$

1) Din ecuaţiile (3) şi (4), ţinînd seama de (6), se pot exprima tensiunile T_1 şi T_2 în funcţie de ε:

$$T_1 = Q - \frac{Q}{g}R\varepsilon \quad (7)$$

$$T_2 = \frac{1}{r}\left(QR - \frac{Q}{g}R^2\varepsilon - J\varepsilon\right). \quad (8)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind T_2 în (5), se obţine următoarea ecuaţie:

$$\alpha\varepsilon+\beta\omega=QR, \tag{9}$$

unde

$$\alpha=J+\frac{Q}{g}R^2+\frac{Pb^2}{3g}, \tag{10}$$

$$\beta=\frac{2}{3}khb^3. \tag{11}$$

Deoarece $\omega=\dot{\theta}$ şi $\varepsilon=\ddot{\theta}$ (θ reprezintă unghiul de rotaţie al plăcii), ecuaţia (9) poate fi scrisă sub forma

$$\alpha\ddot{\theta}+\beta\dot{\theta}=QR. \tag{9'}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (9') se compune din soluţia generală a ecuaţiei omogene şi soluţia particulară a ecuaţiei neomogene de formă

$$\theta_p=At\left(A=\frac{QR}{\beta}\right).$$

Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale omogene este

$$\alpha\lambda^2+\beta\lambda=0,$$

avînd rădăcinile

$$\lambda_1=0, \qquad \lambda_2=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Astfel, legea mişcării plăcii, soluţia ecuaţiei diferenţiale (9') este de forma:

$$\theta=C_1+C_2\,e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}+\frac{QR}{\beta}t. \tag{12}$$

Pe baza condiţiilor iniţiale

$$t=0, \quad \theta=0, \quad \dot{\theta}=0$$

rezultă

$$C_2=-C_1=\frac{\alpha}{\beta^2}QR$$

şi legea mişcării (12) devine

$$\theta=\frac{\alpha}{\beta^2}QR\left(e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}-1\right)+\frac{QR}{\beta}t. \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza unghiulară ω şi acceleraţia unghiulară ε se obţin prin derivare:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{QR}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\right), \tag{14}$$

$$\varepsilon = \ddot{\theta} = \frac{QR}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}. \tag{15}$$

Înlocuind ε după (15) în relaţiile (7) şi (8), se obţin cele două tensiuni în funcţie de timp:

$$T_1 = Q\left(1 - \frac{QR^2}{\alpha g} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\right) \tag{16}$$

$$T_2 = Q\frac{R}{r}\left[1 - \frac{1}{\alpha}\left(J + \frac{QR^2}{g}\right)e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\right]. \tag{17}$$

3) La momentul t_1, cînd se desprinde greutatea Q, viteza unghiulară a plăcii are valoarea:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{QR}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_1}\right),$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării în continuare se obţine înlocuind în (9) $Q = 0$, rezultînd

$$\alpha_1\varepsilon + \beta\omega = 0, \qquad \alpha_1 = J + \frac{Pb^2}{3g} \tag{18}$$

sau

$$\alpha_1\frac{d\omega}{dt} + \beta\omega = 0.$$

S-a obţinut o ecuaţie diferenţială ale cărei variabile se pot separa:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\beta}{\alpha_1}dt.$$

Integrînd, rezultă:

$$\ln\omega = -\frac{\beta}{\alpha_1}t + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă timpul t se măsoară din momentul desprinderii greutăţii Q pentru $t=0$, $\omega=\omega_1$. Pe baza acestei condiţii iniţiale rezultă $C=\ln \omega_o$ şi astfel viteza unghiulară ω în funcţie de timp va fi

$$\omega = \omega_1 e^{-\frac{\beta}{\alpha_1} t}. \tag{19}$$

Notînd cu t_2 timpul după care viteza unghiulară a plăcii se reduce la jumătate, se poate scrie următoarea ecuaţie:

$$\frac{\omega_1}{2} = \omega_1 e^{-\frac{\beta}{\alpha_1} t_2},$$

din care rezultă

$$t_2 = \frac{\alpha_1}{\beta} \ln 2. \tag{20}$$

3.2. PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE. PRINCIPIUL LUI TORICELLI

3.7*.

1) În fig. III.7 s-a reprezentat sistemul împreună cu toate forţele care acţionează asupra lui. De asemenea s-a luat un sistem de referinţă cu originea în articulaţia A. Pentru determinarea poziţiei de echilibru se aplică principiul deplasărilor virtuale, dînd sistemului o deplasare compatibilă cu legăturile (bara AB se roteşte în jurul lui A cu unghiul $\delta\theta$, iar punctul C se deplasează de-a lungul axei y cu δy_C). În această deplasare, numai $\overline{P}$ şi forţa elastică $\overline{F}_e$ efectuează lucru mecanic.

Avem $\quad y_B = l \sin\theta, \quad y_C = 2l \sin\theta$

$$\delta y_B = l \cos\theta \delta\theta \quad \delta y_C = 2l \cos\theta \delta\theta.$$

Deformaţia arcului este $\Delta h = y_C - h = 2l \sin\theta - h$, iar mărimea forţei elastice

$$F_e = k\Delta h = k(2l \sin\theta - h). \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

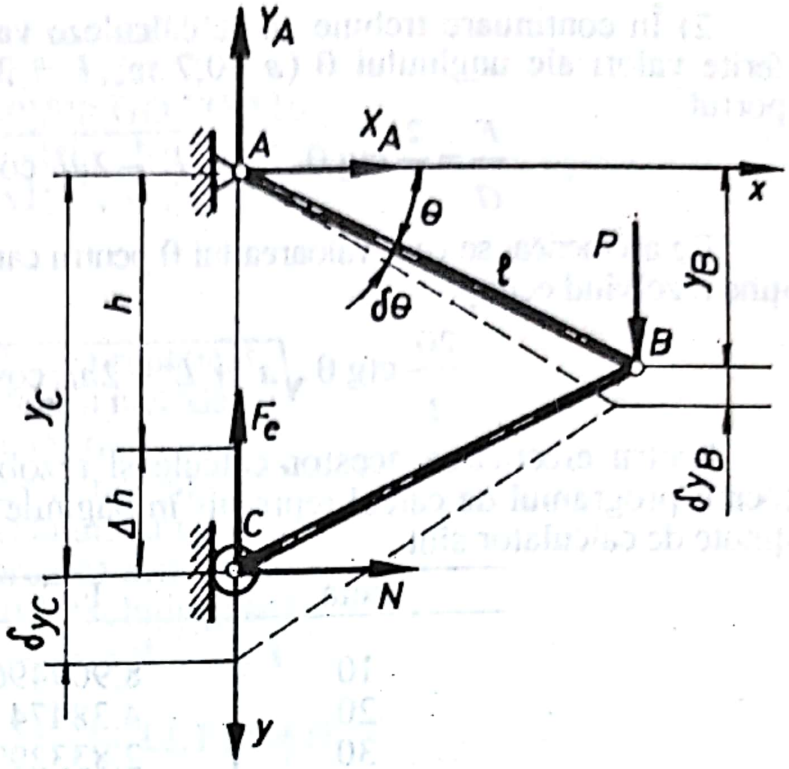


Fig. III.7

Principiul deplasărilor virtuale ($\delta \mathcal{L}_d = 0$) conduce la ecuaţia $P\delta y_B - F_e \delta y_C = 0$ respectiv după înlocuiri

$$P(l\cos\theta\delta\theta) - k(2l\sin\theta - h)(2l\cos\theta\delta\theta) = 0. \tag{2}$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$\sin\theta = \frac{P + 2kh}{4kl}. \tag{3}$$

2) Înlocuind expresia lui $\sin\theta$ în relaţia (1), se obţine că

$$F_e = \frac{1}{2}P.$$

3.8.

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3P}{Q};\qquad 2)\ P = \frac{1}{3}Q.$$

3.9.

1) Se dă sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, în care singurele forţe care efectuează lucru mecanic sînt G şi F.

$$F = \frac{2G}{L}\operatorname{ctg}\theta\sqrt{a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) În continuare trebuie să se calculeze valorile forţei F pentru diferite valori ale unghiului θ (a =0,7 m; L = 3,2 m). Se va calcula raportul

$$\frac{F}{G}=\frac{2}{L}\operatorname{ctg}\theta\sqrt{a^2+L^2-2aL\cos\theta}. \qquad (2)$$

De asemenea, se cere valoarea lui θ pentru care $\frac{F}{G}=1$. Aceasta se obţine rezolvînd ecuaţia

$$\frac{2G}{L}\operatorname{ctg}\theta\sqrt{a^2+L^2-2aL\cos\theta}-1=0.$$

Pentru efectuarea acestor calcule şi rezolvarea ecuaţiei (3) s-a întocmit programul de calcul reprodus în paginile 174–175. Rezultatele obţinute de calculator sînt:

teta	F/G
10	8.9094965
20	4.38474
30	2.8332994
40	2.012204
50	1.4693897
60	1.0514127
70	0.68990085
80	0.34766038
90	0

Pentru F/G =1 rezultă teta=61.358956 grade
Eroarea= .00057295779

```
10 REM
20 REM P3.9
30 REM
40DEF FN g(x) =(2/L)* (COS x/SI
Nx)* SQR ) (a*a+L*L–2*a*L*COS x)
50 DEF FN f(x)= FN g(x)–1
55 LET a=0.7: LET L=3.2
70 LET eps=00001
75 GO SUB 3000
77 INPUT "x1=";x1;" x2=";x2
80 GO SUB 1000
90 IF kod=0·THEN LPRINT: LPRI
```


Scanned with OKEN Scanner

```
NT" Pentru F/G=1 rezulta" ' "te
ta="; (x1*180)/PI;" grade" ' " Er
oarea="; (eps*180)/PI: GO TO 110
100 LPRINT: LPRINT" Nu exista
soluţie în:" ' "("; x1;","; x2;")
"
110 STOP
1000 REM
1010 REM Rezolvarea ecuaţiei:
1020 REM f(x)=0 prin metoda
1030 REM înjumătăţirii.
1040 REM x1 x2 sînt marginile
1050 REM intervalului, iar eps
1060 REM este eroarea admisă
1065 REM kod=0 pt. soluţie găsită
1067 REM kod= -1pt. sol. inexist.
1070 REM
1080 LET f1= FN f(x1): LET f2=FN
f(x2)
1090 IF f1*f2>0 THEN LET kod= -1:
RETURN
1100 LET kod=0
1110 IF ABS (x2 -x1)<eps THEN RET
URN
1120 LET xm=(x1+x2)/2: LET fm=FN
f(xm)
1130 IF f1*fm<0 THEN GO TO 1150
1140 LET x1=xm: LET f1=fm: GO TO
1110
1150 LET x2=xm: LET f2=fm: GO TO
1110
3000 LET y=10
3005 LPRINT"    P3.9": LPRINT
3010 LPRINT"    teta", "F/G":L
PRINT
3040 LET x=y*PI/180
3050 LPRINT"  ";y, FN g(x)
3060 LET y=y+10
3070 IF y<=90 THEN GO TO 3040
3080 RETURN
```


Scanned with OKEN Scanner

3.10*.

1) Pentru determinarea forţelor de legătură se aplică principiul deplasărilor virtuale, dînd următoarele deplasări virtuale grinzii cu zăbrele: translaţie de-a lungul axei Ax (δx), translaţie de-a lungul axei Ay (δy), rotaţie în planul xAy în jurul articulaţiei A ($\delta\theta$). Se obţin relaţiile:

$$(\delta x) \quad X_A \delta x + P\delta x = 0$$

$$(\delta y) \quad Y_A \delta y - 2P\delta y + N\delta y = 0$$

$$(\delta\theta) \; N3a\delta\theta - 2Pa\delta\theta - P\sin\alpha \frac{a}{\sin\alpha}\delta\theta = 0,$$

din care rezultă

$$N = Y_A = P, \qquad X_A = -P$$

2) Pentru determinarea efortului dintr-o bară se îndepărtează (imaginar) bara respectivă, introducînd în locul ei efortul corespunzător şi se dă apoi sistemului o deplasare virtuală care devine posibilă în felul acesta. Astfel, înlocuind bara 1 cu efortul N_1, devine posibilă rotaţia în jurul punctului D. Lucrul mecanic virtual în această rotaţie este:

$$N_1 \cos 45^\circ \frac{a}{\cos 45^\circ}\delta\alpha - P\cos 45^\circ \frac{a}{\cos 45^\circ}\delta\alpha + N2a\delta\alpha = 0.$$

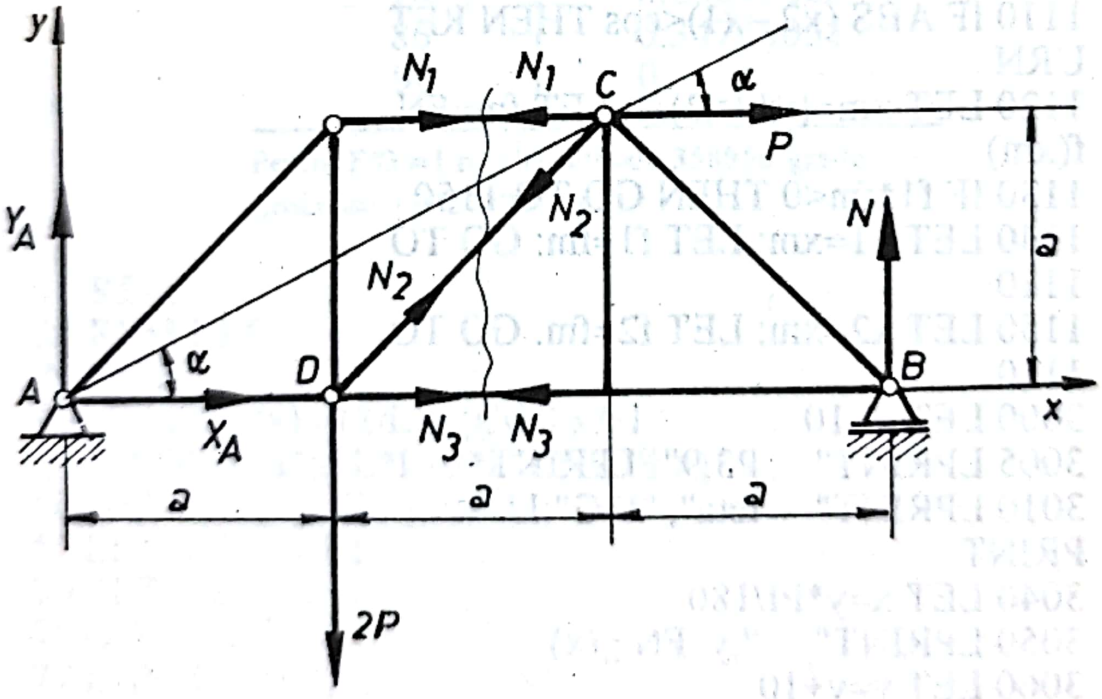


Fig III.10

De aici rezultă:

$$N_1 = P - 2N = -P.$$

Dacă se elimină bara 2, devine posibilă o mişcare de translaţie rectilinie în direcţia axei Ay, iar cînd se elimină bara 3, o rotaţie în jurul punctului C. Efectuînd calculele, rezultă:

$$N_2 = P\sqrt{2}; \qquad N_3 = P.$$

3.11.

1) $X_0 = N = 4P, \qquad Y_0 = 6P.$

2) $N_1 = 4P; \qquad N_2 = -3P\sqrt{2}; \qquad N_3 = -P.$

3.12*. Deoarece sistemul este supus la legături ideale şi forţele direct aplicate sînt greutăţi, pentru determinarea poziţiilor de echilibru se poate aplica principiul lui Toricelli. Roţile dinţate, avînd aceeaşi rază, se rotesc cu acelaşi unghi φ (fig. III.12). Se vor determina valorile acestui unghi corespunzătoare poziţiilor de echilibru.

Ordonata centrului de greutate este

$$y_C = \frac{m_1 e_1 \cos\varphi - m_2 e_2 \sin\varphi}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

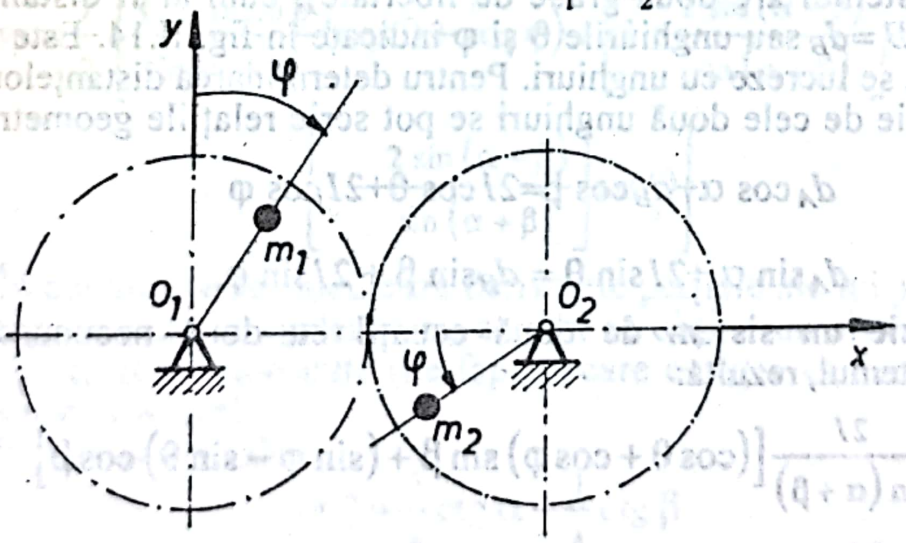


Fig. III.12

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să de determine valorile unghiului φ pentru care y_C este minim sau maxim:

$$\frac{dy_C}{d\varphi} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(-m_1 e_1 \sin\varphi - m_2 e_2 \cos\varphi\right). \qquad (2)$$

Egalînd cu zero derivata $\frac{dy_C}{d\varphi}$, se obţine $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{m_2 e_2}{m_1 e_1}$. În cazul $e_1 = e_2$ rezultă

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{m_2}{m_1}. \qquad (3)$$

Relaţiei (3) îi corespund în intervalul $(0, 2\pi)$ două valori distincte. Una (φ_1) se află între $\frac{\pi}{2}$ şi π, iar cealaltă (φ_2) între $\frac{3\pi}{2}$ şi 2π. Se poate verifica uşor că pentru $\varphi=\varphi_1$, y_C este minim, deci echilibrul este stabil, iar pentru $\varphi=\varphi_2$, y_C devine maxim, iar echilibrul instabil. Rezultatele numerice:

a) $m_2 = m_1$; $\varphi_1 = 3\frac{\pi}{4}\left(135^\circ\right)$; $\varphi_2 = 3\frac{\pi}{4} + \pi\left(315^\circ\right)$.

b) $m_2 = 2m_1$; $\varphi_1 = 116{,}565^\circ$; $\varphi_2 = 296{,}565^\circ$.

3.13. $\theta = \frac{\pi}{3}$.

3.14. Poziţia de echilibru a sistemului poate fi dată prin doi parametri (sistemul are două grade de libertate), cum ar fi distanţele $OA = d_A$ şi $OB = d_B$ sau unghiurile θ şi φ indicate în fig.III.14. Este mai convenabil să se lucreze cu unghiuri. Pentru determinarea distanţelor d_A şi d_B în funcţie de cele două unghiuri se pot scrie relaţiile geometrice:

$$d_A \cos\alpha + d_B \cos\beta = 2l\cos\theta + 2l\cos\varphi$$

$$d_A \sin\alpha + 2l\sin\theta = d_B \sin\beta + 2l\sin\varphi,$$

care constituie un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute. Rezolvînd sistemul, rezultă:

$$d_A = \frac{2l}{\sin(\alpha+\beta)}\left[(\cos\theta + \cos\varphi)\sin\beta + (\sin\varphi - \sin\theta)\cos\beta\right]$$

$$d_B = \frac{2l}{\sin(\alpha+\beta)}\left[(\cos\theta + \cos\varphi)\sin\alpha - (\sin\varphi - \sin\theta)\cos\alpha\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

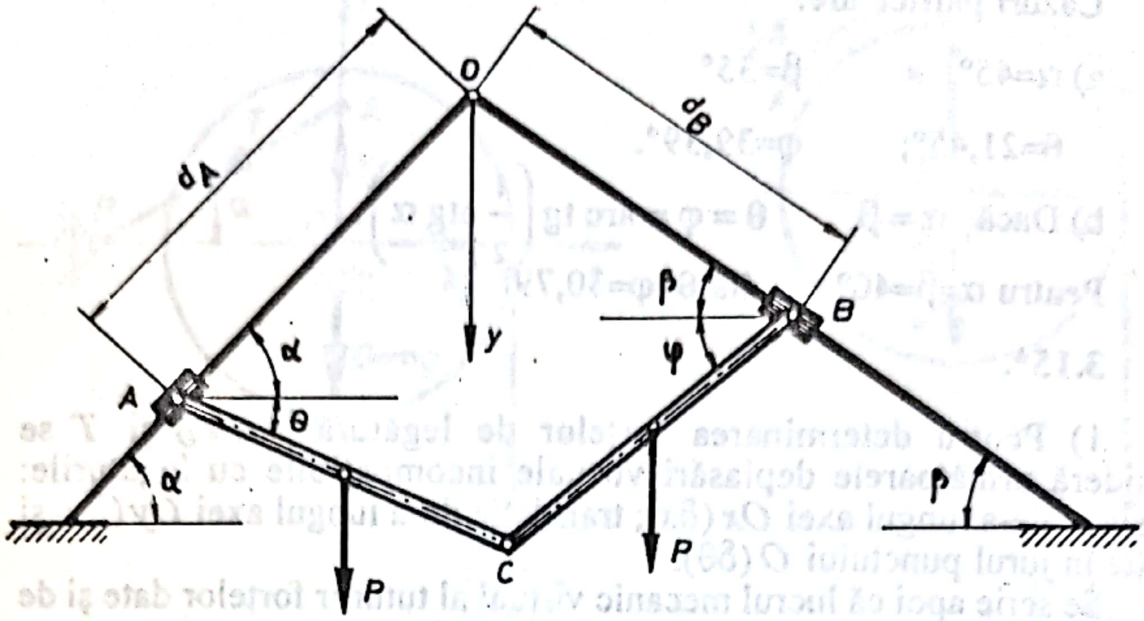


Fig. III.14

Ordonata centrului de greutate al sistemului este:

$$y_C = \frac{\left(d_A \sin\alpha + l\sin\theta\right) P + \left(d_B \sin\beta + l\sin\varphi\right) P}{2P};$$

Înlocuind d_A şi d_B în funcţie de θ şi φ, se obţine după efectuarea calculelor următoarea expresie:

$$y_C = \frac{l}{2}\left\{\frac{4\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}(\cos\theta+\cos\varphi)+\left[1+\frac{2\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\sin\varphi+\right.$$

$$\left.+\left[1-\frac{2\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\sin\theta\right\}.$$

În continuare se calculează derivatele parţiale ale lui y_C în raport cu θ şi φ; acestea se egalează cu zero şi se obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute (de fapt fiecare ecuaţie va conţine cîte o singură necunoscută).

Rezultatele finale:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\beta$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\beta - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cazuri particulare:

a) $\alpha=45°$, $\beta=35°$

$\theta=21,45°$; $\varphi=39,39°$.

b) Dacă $\alpha=\beta$, $\theta=\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

Pentru $\alpha=\beta=40°$ rezultă $\theta=\varphi=30,79°$

3.15*.

1) Pentru determinarea forţelor de legătură X_O, Y_O şi T se consideră următoarele deplasări virtuale incompatibile cu legăturile: translaţie de-a lungul axei Ox (δx); translaţie de-a lungul axei Oy (δy) şi rotaţie în jurul punctului O ($\delta\theta$).

Se scrie apoi că lucrul mecanic virtual al tuturor forţelor date şi de legătură este nul în fiecare din aceste deplasări.

Se obţin ecuaţiile

$$(\delta x)\quad X_O\delta x - T\cos\alpha\delta x = 0$$

$$(\delta y)\quad Y_O\delta y - P\delta y - G\delta y - T\sin\alpha\delta y = 0$$

$$(\delta\theta)\quad T\cos\alpha\, d\delta\theta - PR\delta\theta = 0,$$

din care rezultă: $T=\dfrac{PR}{d\cos\alpha}=\dfrac{mgR}{d\cos\alpha}=28,319\ N$

$$X_0 = T\cos\alpha = \frac{mgR}{d} = 24,525\ N$$

$$Y_0 = P+G+T\sin\alpha = (m+M)\,g+\frac{mgR}{d}\operatorname{tg}\alpha = 92,637\ \text{N}.$$

2) În fig. III.15.2 este reprezentat din nou sistemul în decursul mişcării împreună cu toate forţele care intervin în principiul deplasărilor virtuale. Forţele direct aplicate sînt greutăţile P şi G, iar forţele de legătură sînt componentele X_O şi Y_O ale reacţiunii din articulaţia O. Pentru corpul de masă m în mişcare de translaţie, rezultanta forţelor de inerţie are mărimea $F_{IP}=ma$, iar pentru disc rezultanta forţelor de inerţie este nulă, momentul rezultant al acestor forţe avînd mărimea $J_z\varepsilon\left(J_z=\frac{1}{2}MR^2\right)$.

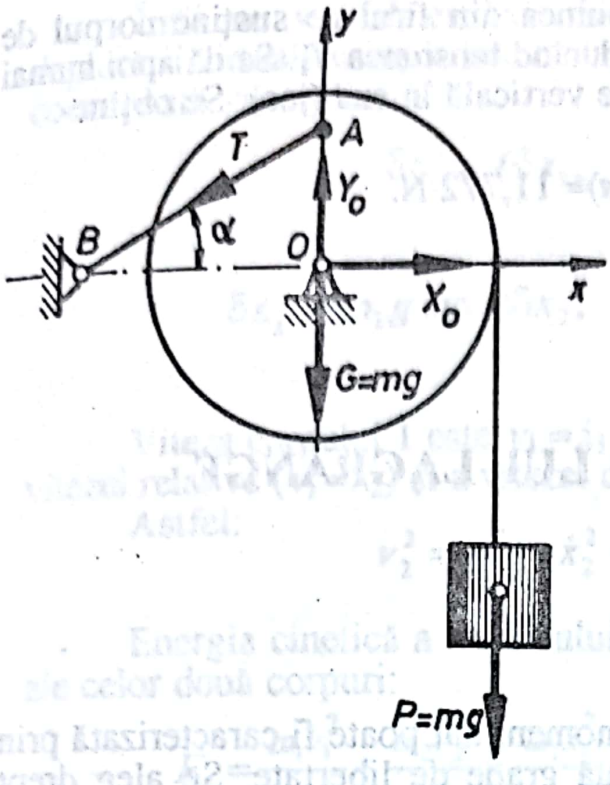


Fig. III.15.1

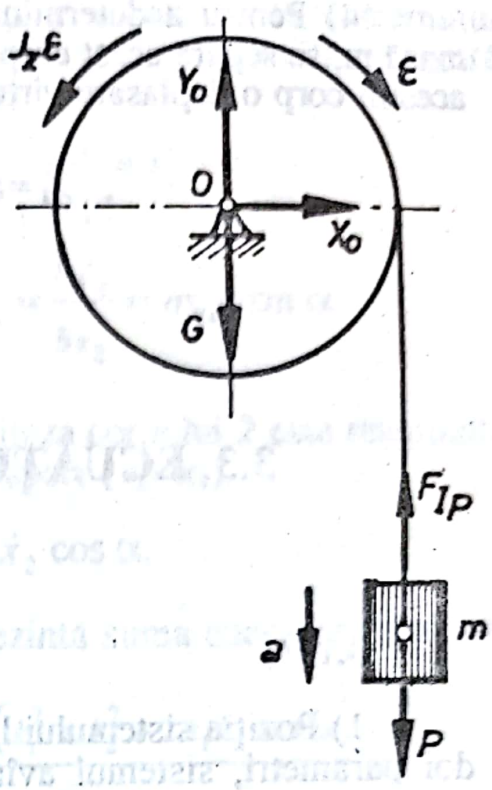


Fig.III.15.2

Pentru a determina acceleraţia corpului de masă m cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale se dă sistemului o deplasare compatibilă cu legăturile: corpul de masă m coboară în jos cu δx, în timp ce discul se roteşte cu $\delta\theta = \frac{\delta x}{R}$. În această deplasare virtuală, forţele de legătură nu efectuează lucru mecanic, deci va trebui să avem $\delta\mathcal{L}_d + \delta\mathcal{L}_I = 0$. Dintre forţele direct aplicate numai $P = mg$ efectuează lucru mecanic şi astfel se obţine următoarea ecuaţie

$$P\,\delta x - ma\,\delta x - J_z\varepsilon\delta\theta = 0.$$

Înlocuind în această ecuaţie $P = mg$, $J_z = \frac{1}{2}MR^2$, $\varepsilon = \frac{a}{R}$, $\delta\theta = \frac{\delta x}{R}$, δx se va simplifica şi se obţine o ecuaţie din care se poate determina acceleraţia a. Se regăseşte rezultatul obţinut în capitolul precedent.

$$a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}\,g = 3{,}924\ \text{m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Pentru a determina tensiunea din firul ce susține corpul de masă m, se separă acest corp introducînd tensiunea T_1. Se dă apoi numai acestui corp o deplasare virtuală pe verticală în sus (jos). Se obține

$$T_1 = m\,(g-a) = 11{,}772 \text{ N}.$$

3.3. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

3.17*

1) Poziția sistemului la un moment dat poate fi caracterizată prin doi parametri, sistemul avînd două grade de libertate. Se aleg drept coordonate generalizate deplasarea absolută a corpului 1 ($q_1 = x_1$) și deplasarea relativă a corpului 2 ($q_2 = x_2$), (fig.III.17).

Mișcarea sistemului se va studia cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i; \qquad i = 1, 2.$$

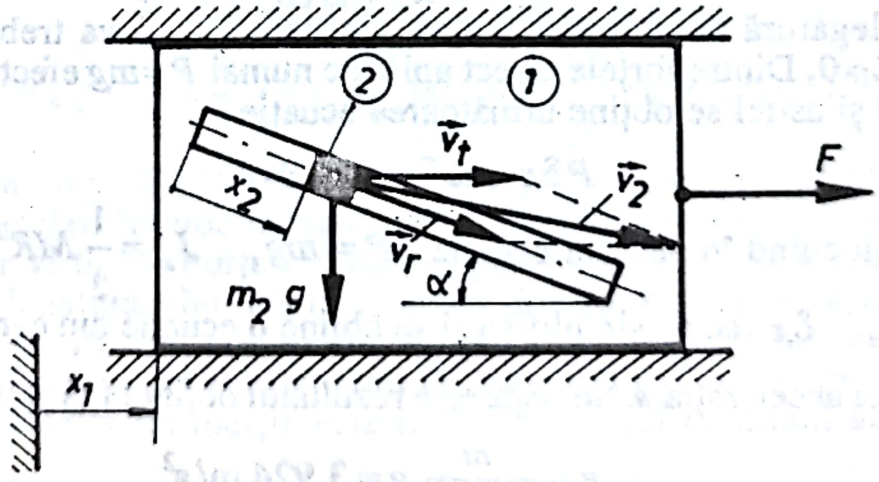


Fig.III.17

Întîi se vor determina forţele generalizate, dînd sistemului deplasării virtuale compatibile cu legăturile în care variază cîte o singură coordonată generalizată:

$$\delta\mathcal{L}_1 = F\delta x_1, \qquad Q_1 = \frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta x_1} = F$$

$$\delta\mathcal{L}_2 = m_2 g \sin\alpha\delta x_2, \qquad Q_2 = \frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta x_2} = m_2 g \sin\alpha.$$

Viteza corpului 1 este $v_1 = \dot{x}_1$, iar viteza corpului 2 este rezultanta vitezei relative ($v_r = \dot{x}_2$) şi a vitezei de transport ($v_t = \dot{x}_1$).

Astfel:

$$v_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos\alpha.$$

Energia cinetică a sistemului reprezintă suma energiilor cinetice ale celor două corpuri:

$$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + m_2\cos\alpha\,\dot{x}_1\dot{x}_2.$$

În continuare se calculează derivatele energiei cinetice în raport cu coordonatele şi vitezele generalizate:

$$\frac{\partial E_c}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial E_c}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = \left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1 + m_2\cos\alpha\,\dot{x}_2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 + m_2\cos\alpha\,\dot{x}_1.$$

Înlocuind mărimile determinate în ecuaţiile lui Lagrange, se obţine următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 + m_2\cos\alpha\ddot{x}_2 = F$$

$$m_2\cos\alpha\,\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = m_2 g\sin\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că sistemul conţine ca necunoscute numai acceleraţiile $\ddot{x}_1$ şi $\ddot{x}_2$ la puterea întîi. Rezolvînd sistemul, obţinem:

$$\ddot{x}_1 = a_1 = \frac{F - m_2 g \sin\alpha \cos\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha}$$

$$\ddot{x}_2 = a_2 = \frac{-F\cos\alpha + (m_1 + m_2) g \sin\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha}.$$

Cu datele numerice ale problemei rezultă a_1=1,773 m/s^2; a_2= =1,273 m/s^2

2) $F=(m_1+m_2)g\,\mathrm{tg}\,\alpha$= 46,417 N

$a_1=g\,\mathrm{tg}\,\alpha$=3,57 m/s^2

3) $F=m_2 g\sin\alpha\cos\alpha$=3,153 N

a_2=g sin α=3,355 m/s^2

3.18.

1) $$\omega = \sqrt{\frac{m_1(1-\cos\varphi) + m_2\sin\varphi}{m_1+m_2}\cdot\frac{2g}{e}}$$

$$\varepsilon = \frac{m_1\sin\varphi + m_2\cos\varphi}{m_1+m_2}\cdot\frac{g}{e}.$$

Valoarea maximă a lui φ se determină din condiţia ω=0 şi este dată de relaţia:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_{max}}{2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Deoarece relaţia $\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{m_2}{m_1}$ determină valoarea unghiului φ corespunzătoare poziţiei de echilibru (este vorba de valoarea φ_1 cuprinsă între $\frac{\pi}{2}$ şi π, pentru care echilibrul este stabil aşa cum se arată în problema 3:12), rezultă că $\varphi_{max}=2\varphi_1$.

Cazuri particulare:

a) $m_2=m_1$, φ_{max}=270°; b) $m_2=2m_1$, φ_{max}=233,13°.

Scanned with OKEN Scanner

Viteza unghiulară ω este maximă cînd sistemul trece prin poziţia de echilibru stabil ($\varphi=\varphi_1$) şi

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{m_1+\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{m_1+m_2}\cdot\frac{2g}{e}}.$$

Cazuri particulare:

a) $m_2=m_1$; $\quad\omega_{max}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{g}{e}}=12{,}166\ \text{rad/s}.$

b) $m_2=2\,m_1$; $\quad\omega_{max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2g}{e}}=11{,}501\ \text{rad/s}.$

Acceleraţia unghiulară ε este maximă pentru $\varphi=\varphi^*=\text{arc tg}\,\frac{m_1}{m_2}$ şi minimă pentru $\varphi=\varphi^*+\pi(\varepsilon_{min}=-\varepsilon_{max})$

$$\varepsilon_{max}=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{m_1+m_2}\cdot\frac{g}{e}.$$

Cazuri particulare:

a) $m_2=m_1$; $\quad\varepsilon_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{g}{e}=43{,}354\ \text{rad/s}^2.$

b) $m_2=2m_1$; $\quad\varepsilon_{max}=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{g}{e}=45{,}699\ \text{rad/s}^2.$

2) Condiţia ca sistemul să ajungă înapoi în poziţia iniţială este ca viteza unghiulară să nu se anuleze pînă în poziţia de echilibru instabil ($\varphi=\varphi_2=\varphi_1+\pi$):

$$\omega_{0\,min}=\sqrt{\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2}-m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{2g}{e}}.$$

Cazuri particulare:

a) $m_2=m_1$ $\quad\omega_{0\,min}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{g}{e}}=5{,}039\ \text{rad/s}.$

b) $m_2=2m_1$ $\quad\omega_{0\,min}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{3}\cdot\frac{2g}{e}}=7{,}108\ \text{rad/s}.$

Scanned with OKEN Scanner

3)

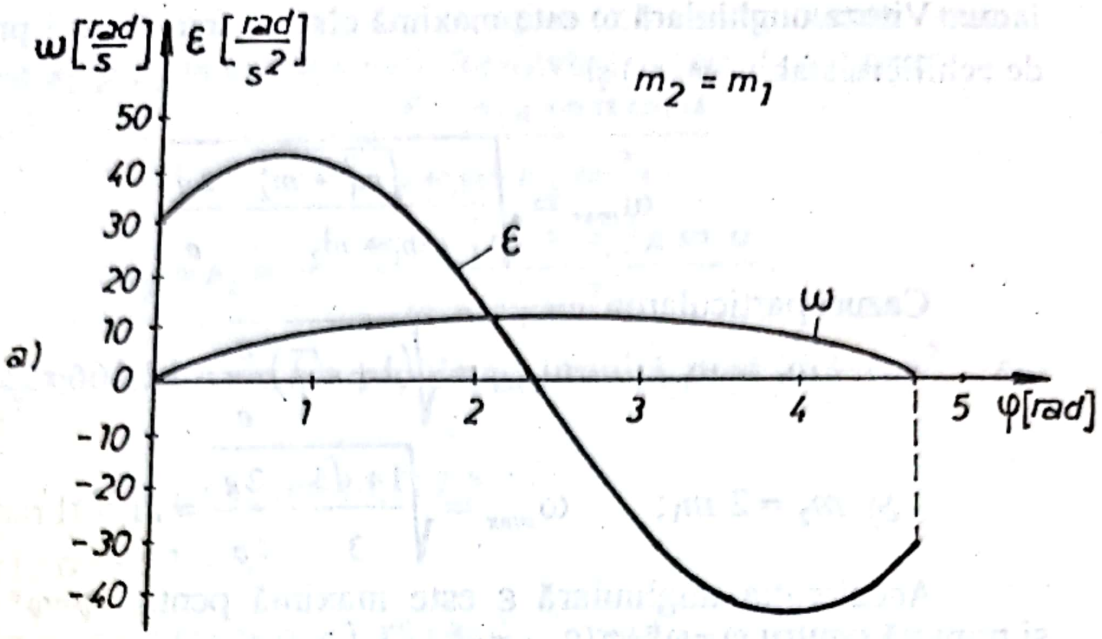


Fig. III.18 *a*

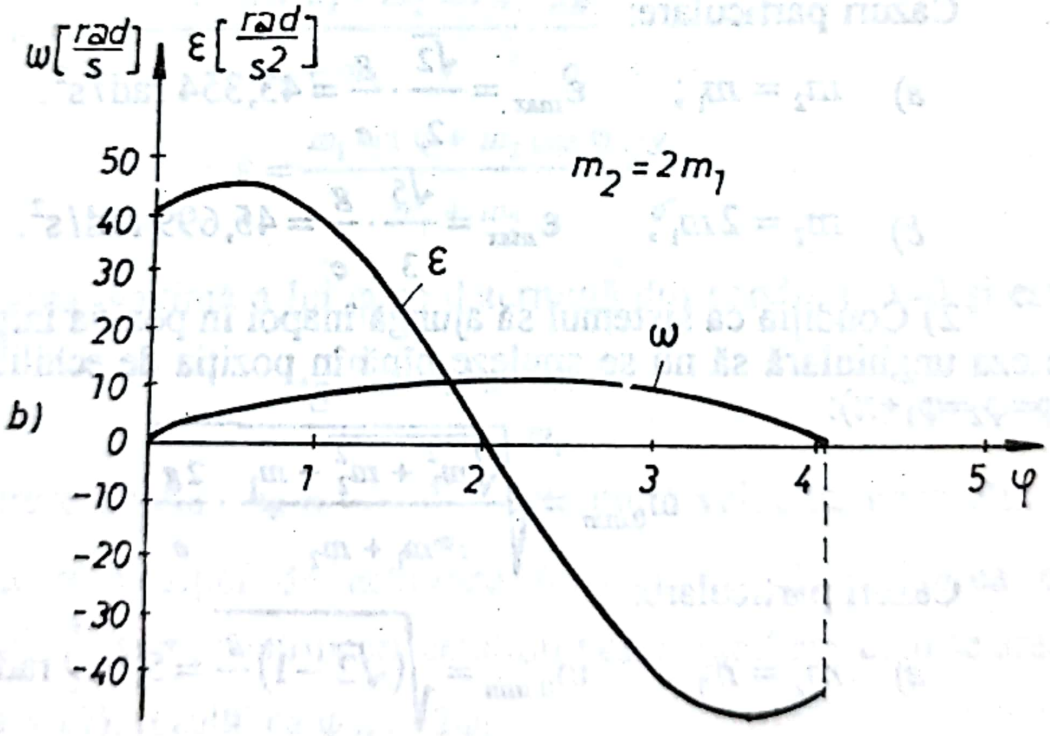


Fig. III.18 *b*

Scanned with OKEN Scanner

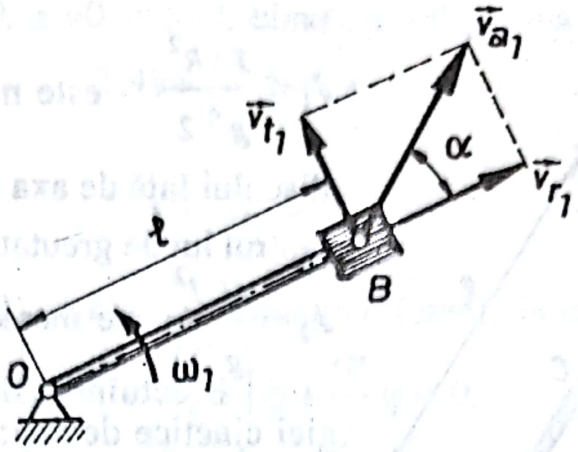


Fig.III.19

3.19.

1) $\ddot{x} - x\dot{\theta}^2 = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(J\dot{\theta} + mx^2\dot{\theta}\right) = 0,$

unde θ reprezintă unghiul de rotaţie al barei cotite.

2) $\omega = \omega_0 \dfrac{J + mx_0^2}{J + mx^2}, \qquad v_r = \omega_0 \sqrt{\left(J + mx_0^2\right)\dfrac{x^2 - x_0^2}{J + mx^2}}.$

3) $v_{a_1} = \omega_0 \sqrt{\left(l^2 - x_0^2\right)\dfrac{J + mx_0^2}{J + ml^2} + l^2\left(\dfrac{J + mx_0^2}{J + ml^2}\right)^2}.$

4) După ce culisorul părăseşte bara, aceasta din urmă se va roti cu viteza unghiulară constantă $\omega_1 = \omega_0 \dfrac{J + mx_0^2}{J + ml^2}$, iar culisorul pornind cu viteza $\vec{v}_{a_1}$ se va mişca sub acţiunea greutăţii (aruncare orizontală) într-un plan vertical, care formează cu planul în care se află bara cotită în acel moment unghiul α (fig.III.19), dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{t_1}}{v_{r_1}} = \sqrt{\frac{l^2 - x_0^2}{l^2} \cdot \frac{J + mx_0^2}{J + ml^2}}.$$

3.20*. Poziţia sistemului la un moment dat poate fi caracterizată prin doi parametri, distanţa x şi unghiul φ (fig. III.20), sistemul avînd două grade de libertate. Energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{P}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}J_1\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{G}{2g}\left[\dot{x}^2 + \left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi\right] + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

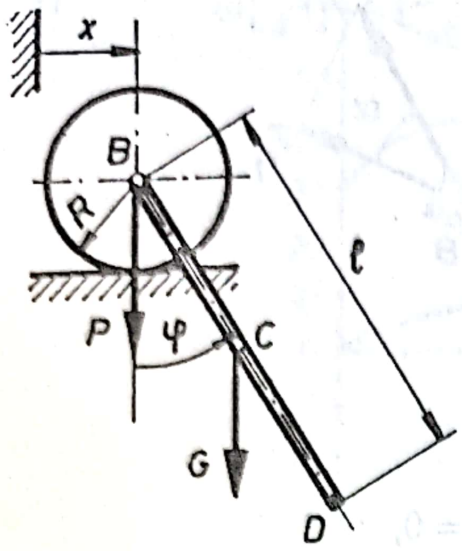


Fig.III.20

unde

$J_1 = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}$ este momentul de inerţie al discului faţă de axa de rotaţie ce trece prin centrul lui de greutate;

$J_2 = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12}$ este momentul de inerţie al barei.

Efectuînd calculele, expresia energiei cinetice devine:

$$E_c = A\dot{x}^2 + B\dot{\varphi}^2 + \frac{G}{g}\dot{x}\dot{\varphi}\frac{l}{2}\cos\varphi,$$

unde:

$$A = \frac{3P}{4g} + \frac{G}{2g}, \qquad B = \frac{Gl^2}{6g}.$$

Energia potenţială a sistemului este:

$$E_p = G\frac{l}{2}(1-\cos\varphi).$$

Aplicînd ecuaţiile lui Lagrange pentru sisteme conservative:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad L = E_c - E_p,$$

unde $q_1 = x$ $q_2 = \varphi$, se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{d}{dt}\left(2A\dot{x} + \frac{Gl}{2g}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) = 0,$$

$$2B\ddot{\varphi} + \frac{Gl}{2g}\ddot{x}\cos\varphi + \frac{Gl}{2g}\sin\varphi = 0.$$

Deoarece sistemul efectuează mici oscilaţii, se pot face aproximările

$$\cos\varphi \approx 1, \quad \sin\varphi \approx \varphi,$$

cu care sistemul de ecuaţii devine:

$$2A\dot{x} + \frac{Gl}{2g}\dot{\varphi} = C \qquad (1)$$

$$2B\ddot{\varphi} + \frac{Gl}{2g}\ddot{x} + \frac{Gl}{2}\varphi = 0. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece la $t=0$, $\dot{x}=0$ şi $\dot{\varphi}=0$, rezultă $C=0$ şi ecuaţia (1) devine

$$2A\dot{x}+\frac{Gl}{2g}\dot{\varphi}=O \tag{1'}$$

de unde

$$\dot{x}=-\frac{Gl}{4gA}\dot{\varphi}. \tag{3}$$

Înlocuind $\dot{x}$ în (2) se obţine o ecuaţie diferenţială în φ:

$$\left(2B-\frac{G^2l^2}{8g^2A}\right)\ddot{\varphi}+\frac{Gl}{2}\varphi=0. \tag{4}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale, care corespunde condiţiilor iniţiale $t=0$, $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}=0$, este

$$\varphi=\varphi_0\cos\omega t, \tag{5}$$

unde

$$\omega=\sqrt{\frac{Gl}{4B-\frac{G^2l^2}{4g^2A}}}=\sqrt{\frac{g}{l}\frac{3(2G+3P)}{G+6P}}. \tag{6}$$

Integrînd ecuaţia (3), se obţine

$$x=C_1-\frac{Gl}{4gA}\varphi. \tag{7}$$

Din condiţia că la $x=0$, $\varphi=\varphi_0$, rezultă $C_1=\frac{Gl}{4gA}\varphi_0$, iar legea mişcării (7) devine:

$$x=\frac{Gl}{4gA}\varphi_0\left(1-\cos\omega t\right). \tag{8}$$

În consecinţă, bara BD oscilează armonic cu amplitudinea φ_0 şi pulsaţia ω dată de relaţia (6), în timp ce axa B a discului efectuează mişcare oscilatorie armonică cu amplitudinea $x_0=\frac{Gl}{4gA}\varphi_0$ şi cu aceeaşi pulsaţie ω. În cazul în care greutatea cilindrului este neglijabilă, rezultatele devin:

$$\omega=\sqrt{\frac{6g}{l}},\qquad x_0=\frac{l}{2}\varphi_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.21. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sistemului sînt:

$$(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta = C$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0.$$

În cazul micilor oscilaţii ($\theta_0<6°$) se pot face aproximaţiile $\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx 1$, cu care ecuaţiile devin:

$$(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta} = C, \qquad l\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0.$$

Se integrează acest sistem de ecuaţii şi se determină constantele de integrare din condiţiile iniţiale:

$$t=0, \quad x=0, \quad \theta=\theta_0, \quad \dot{x}=0, \quad \dot{\theta}=0.$$

Rezultă:

$$\theta = \theta_0\cos\omega t, \quad x = \frac{m_2}{m_1+m_2} l\theta_0\left(1-\cos\omega t\right),$$

unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1}}.$$

Corpul de masă m_1 efectuează oscilaţii armonice de-a lungul barei orizontale cu perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}}$, iar bara AB împreună cu bila de masă m_2, mişcare oscilatorie în jurul articulaţiei A cu aceeaşi perioadă. Dacă masa m_1 este foarte mare, atunci deplasarea x a masei m_1 este mică şi perioada T este apropiată de perioada pendulului matematic $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. La pendulul eliptic, spre deosebire de pendulul matematic, se poate modifica perioada prin alegerea convenabilă a celor două mase fără a schimba lungimea l.

3.22*.

1) Pentru a putea determina energia cinetică a discului trebuie să se determine în prealabil viteza absolută a centrului lui de greutate C şi viteza unghiulară absolută de rotaţie a discului.

Scanned with OKEN Scanner

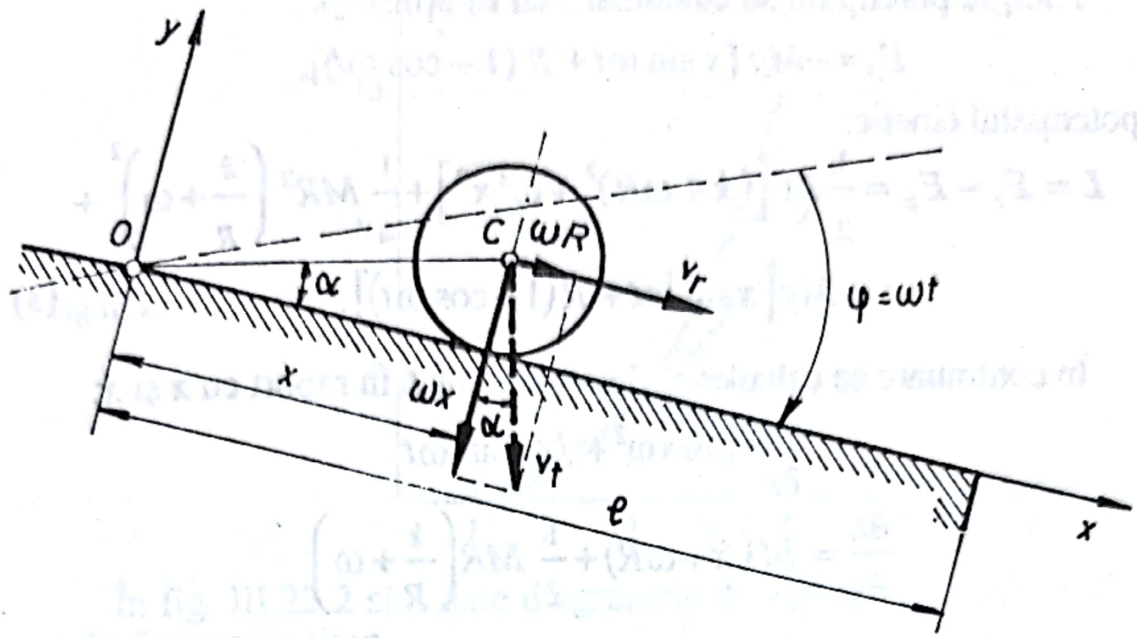


Fig.III.22.1

Viteza relativă a punctului C este $v_r = \dot{x}$. Viteza de transport, perpendiculară pe segmentul OC, are valoarea ω OC. Această viteză are o componentă paralelă cu axa Ox de mărime ωR şi o componentă paralelă cu axa Oy de mărime ωx. Rezultă:

$$v_C^2 = (\dot{x} + \omega R)^2 + (\omega x)^2. \tag{1}$$

Viteza unghiulară a discului faţă de suprafaţa mobilă este $\omega_r = \frac{\dot{x}}{R}$, iar cea absolută

$$\omega_a = \frac{\dot{x}}{R} + \omega. \tag{2}$$

Astfel, energia cinetică a discului este:

$$E_c = \frac{1}{2} M\left[(\dot{x} + \omega R)^2 + (\omega x)^2\right] + \frac{1}{2} J_C \left(\frac{\dot{x}}{R} + \omega\right)^2,$$

unde

$$J_C = \frac{1}{2} MR^2. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Energia potențială se calculează cu relația:

$$E_p = -Mg\,[x \sin \omega t + R\,(1 - \cos \omega t)],$$

iar potențialul cinetic:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} M \left[(\dot{x} + \omega R)^2 + \omega^2 x^2\right] + \frac{1}{4} MR^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} + \omega\right)^2 + \\ + Mg\left[x \sin \omega t + R(1 - \cos \omega t)\right]. \tag{3}$$

În continuare se calculează derivatele lui L în raport cu x și $\dot{x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Mx\omega^2 + Mg \sin \omega t$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M(\dot{x} + \omega R) + \frac{1}{2} MR\left(\frac{\dot{x}}{R} + \omega\right)$$

și

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + \frac{1}{2} MR\frac{\ddot{x}}{R} = \frac{3}{2} M\ddot{x}.$$

Ecuația lui Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ devine

$$\frac{3}{2} M\ddot{x} - M\omega^2 x - Mg \sin \omega t = 0$$

sau, după simplificare și transformare:

$$\ddot{x} - \frac{2}{3}\omega^2 x = \frac{2}{3} g \sin \omega t. \tag{4}$$

Integrînd această ecuație diferențială liniară neomogenă și ținînd seama de condițiile inițiale ($t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$), se obține legea mișcării relative a punctului C:

$$x = \frac{2}{5} \frac{g}{\omega^2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t - \sin \omega t\right). \tag{5}$$

Viteza relativă a punctului C se determină prin derivare:

$$V_r = \dot{x} = \frac{2g}{5\omega}\left(\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t - \cos \omega t\right). \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

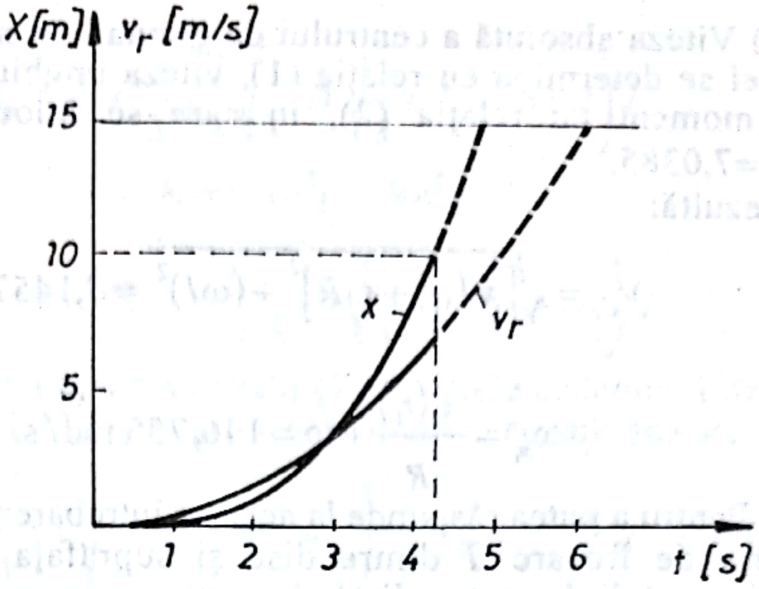


Fig.III.22.2

În fig. III.22.2 sînt date diagramele de variaţie ale parametrilor x şi v_r în funcţie de timp.

Aceste diagrame au fost construite cu ajutorul unui program, dat în anexă, care permite calculul parametrilor x şi v_r pentru diferite valori ale timpului t. Deoarece discul părăseşte suprafaţa mobilă cînd x devine egal cu 10 m, pentru $x>10$ diagramele s-au trasat cu linie întreruptă.

2) Cîteva valori ale parametrilor x şi $v_r=\dot{x}$, calculate cu programul dat în anexă, sînt date în următorul tabel:

t[s]	x [m]	$v_r=\dot{x}$ [m/s]
0	0,0000	0,0000
1	0,1307	0,3922
2	1,0453	1,5671
3	3,5239	3,5190
4	8,3394	6,2389
4,1	8,9789	6,5527
4,2	9,6502	6,8740
4,3	10,3539	7,2029

Se vede că durata mişcării discului pe suprafaţă este între 4,2 şi 4,3 secunde. Valoarea exactă se poate determina fie rezolvînd ecuaţia $x(t)=10$, fie dînd lui t valori între 4,2 şi 4,3 cu un pas suficient de mic şi reţinînd valoarea pentru care rezultă $x=10$. Se obţine astfel că discul părăseşte suprafaţa la momentul $t=t_1=4{,}250$ s. În acest moment viteza relativă a centrului de greutate C are valoarea $v_r(t_1)=\dot{x}(t_1)=$ $=7{,}0385$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

3) Viteza absolută a centrului de greutate în momentul părăsirii suprafeţei se determină cu relaţia (1), viteza unghiulară a discului în acelaşi moment cu relaţia (2), în care se înlocuiesc $x=l=10$ m, $\dot{x}=\dot{x}(t_1)=7{,}0385$.

Rezultă:

$$v_{C_1}=\sqrt{\left[\dot{x}(t_1)+\omega R\right]^2+(\omega l)^2}=7{,}1457\ \text{m/s}$$

$$\omega_{a_1}=\frac{\dot{x}(t_1)}{R}+\omega=146{,}755\ \text{rad/s}.$$

4) Pentru a putea răspunde la această întrebare trebuie să se determine forţa de frecare T dintre disc şi suprafaţa mobilă (necesară asigurării mişcării de rostogolire) şi reacţiunea normală N a suprafeţei. În acest scop se va aplica teorema mişcării centrului de greutate. Aceasta, în cazul de faţă, se exprimă prin egalitatea:

$$M\vec{a}_a=\vec{G}+\vec{N}+\vec{T}, \tag{7}$$

în care $\vec{a}_a$ reprezintă acceleraţia absolută a centrului de greutate ($\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_t+\vec{a}_c$).

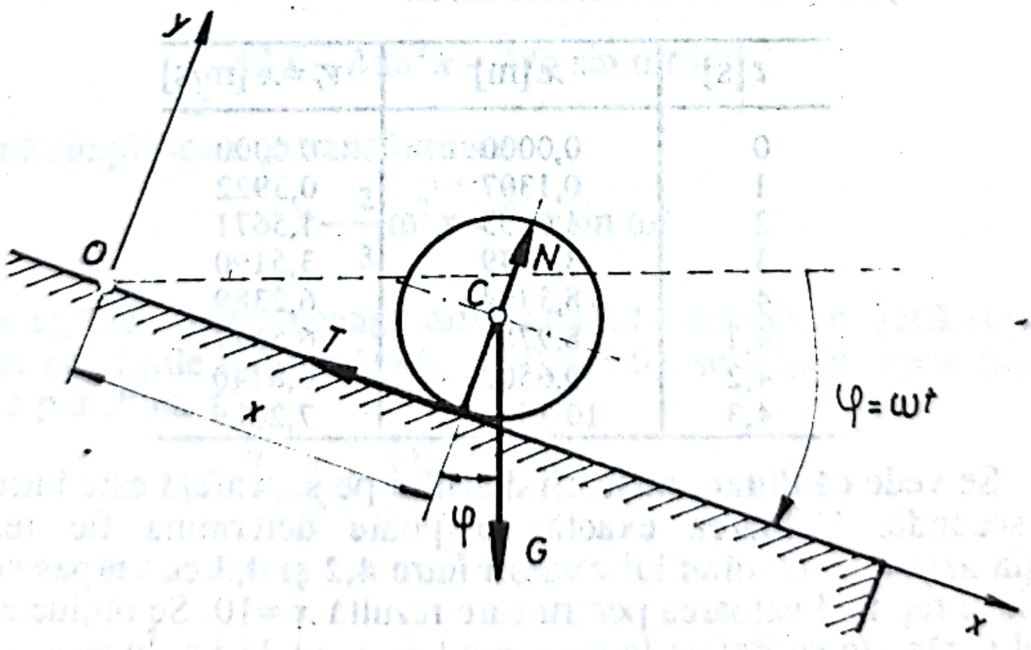


Fig. III.22.3

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} = \frac{2}{5} g\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t + \sin \omega t\right)\vec{i}$$

$$\vec{a}_t = -x\omega^2\vec{i} - R\omega^2\vec{j}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} x \vec{v}_r = -\frac{4g}{5}\left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t - \cos \omega t\right)\vec{j}.$$

Proiectînd ecuaţia vectorială (7) pe axele sistemului de referinţă mobil xOy (fig. III.22.3), se obţin următoarele ecuaţii scalare:

$$(Ox)\quad \frac{2}{5} Mg\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t + \sin \omega t\right) - Mx\omega^2 = Mg \sin \omega t - T \qquad (8)$$

$$(Oy)\quad -MR\omega^2 - \frac{4}{5} Mg\left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t - \cos \omega t\right) = N - Mg \cos \omega t. \qquad (9)$$

Din ecuaţia (8), înlocuind x după relaţia (5) se poate determina T în funcţie de timp, iar din (9) reacţiunea normală N tot în funcţie de timp. Efectuînd calculele rezultă:

$$T = \frac{1}{5} Mg\left[\sin \omega t + 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t\right] \qquad (10)$$

$$N = \frac{1}{5} Mg\left[9 \cos \omega t - 4 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega t - \frac{5R\omega^2}{g}\right]. \qquad (11)$$

Nu se produce alunecare dacă forţa de frecare necesară T este mai mică decît forţa de frecare maximă μN, deci trebuie să fie îndeplinită condiţia $T \leq \mu N$ *sau* $\mu \geq \frac{T}{N}$.

În fig. III.22.4, *a* se indică variaţia funcţiilor $T(t)$ şi $N(t)$, iar în fig. XII.22.4, *b* a raportului $\frac{T}{N}$ în funcţie de timp.

Se vede că forţa de frecare T creşte în timp, reacţiunea normală scade, iar raportul $\frac{T}{N}$, care reprezintă coeficientul de frecare necesar minim, creşte. În momentul în care discul părăseşte suprafaţa mobilă

Scanned with OKEN Scanner

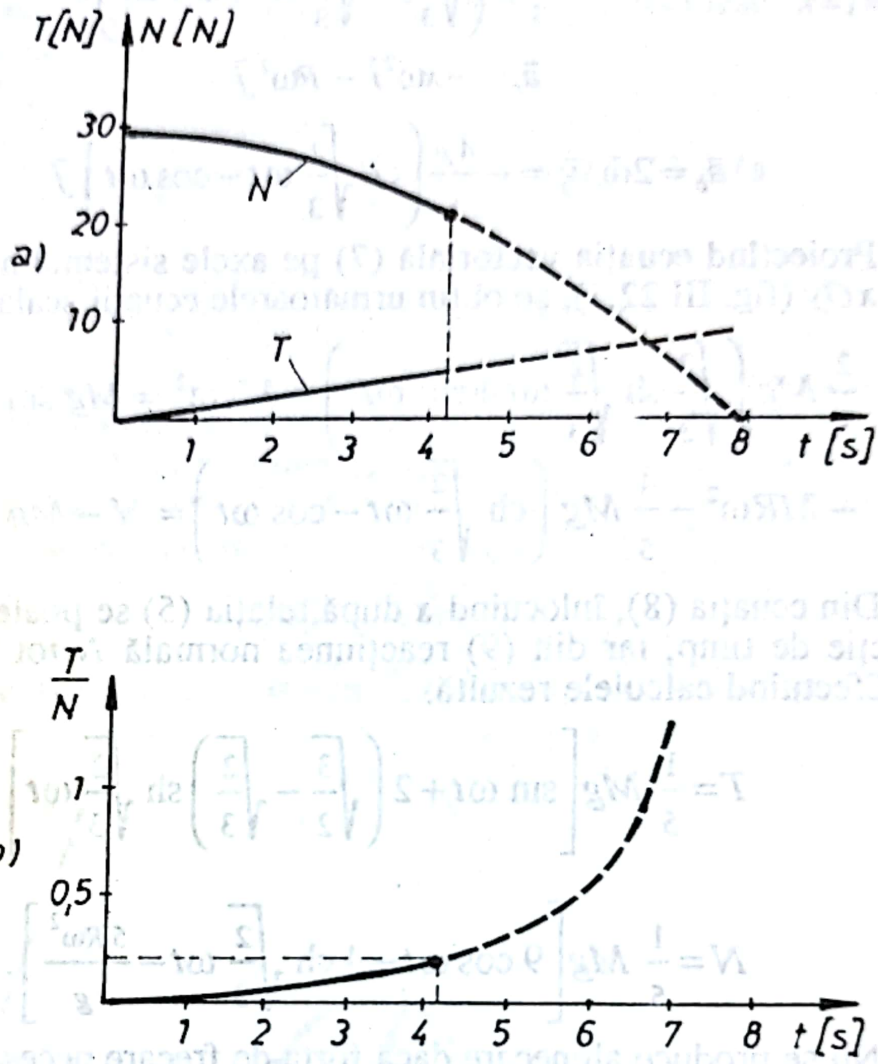


Fig. III.22.4

($t=t_1=4{,}250$ s), $\frac{T}{N}=0{,}239$. Deci, dacă coeficientul de frecare este constant pe toată lungimea suprafeței, aceasta trebuie să aibă cel puțin valoarea $\mu=0{,}239$ ca să fie asigurată condiția rostogolirii fără alunecare.

Diagramele din fig. III.22.4 au fost construite și rezultatele numerice au fost determinate cu ajutorul programului din anexă, folosit și la punctele 1) și 2).

Scanned with OKEN Scanner

4. CIOCNIRI

4.1.

1) $v_1 = 3{,}132 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 2) $v_1' = -1{,}044 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2' = 2{,}088 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3) $\alpha_1 = 19{,}19°$; $\beta_1 = 50{,}977°$.

4) a) $h_2 = 4$ m; b) $h_2 = 0{,}444$ m.

4.2.

a) $\cos\beta_1 = 1 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (1 - \cos\alpha)$, $\beta_1 = \alpha_1 = 19{,}19°$.

b) $\alpha_1 = 0$; $\beta_1 = 28{,}955°$.

c) $\alpha_1 = -19{,}19°$; $\beta_1 = 38{,}94°$.

4.3.

1) $v_1' = -1{,}7155 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2' = 1{,}0293 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(Sensul pozitiv este în jos)

2) $H = 0{,}15$ m.

3) $x_{max} = \frac{v_2'}{\omega_n}$, unde $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} = 33{,}774\ \text{s}^{-1}$;

$x_{max} = 0{,}0305$ m.

Scanned with OKEN Scanner

4) Corpul 2 efectuează mişcare oscilatorie armonică în jurul poziţiei de repaus relativ cu pulsaţia ω_n. El ajunge înapoi în poziţia iniţială după o semiperioadă a mişcării $\left(t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = 0{,}093 \text{ s}\right)$. În acest moment bila se află la înălţimea h_1=0,1171 m.

5) Legile de mişcare ale celor două corpuri după ciocnire sînt:

$$x_1 = v_1' t + \frac{gt^2}{2} = -1{,}7155\ t + 4{,}905\ t^2$$

$$x_2 = \frac{v_2'}{\omega_n} \sin \omega_n t = 0{,}0305 \sin 33{,}774\ t.$$

Se pune condiţia x_1=x_2 şi se obţine. pentru determinarea momentului întîlnirii, următoarea ecuaţie:

$$4{,}905\ t^2 - 1{,}7155\ t - 0{,}0305 \sin 33{,}774\ t.$$

Cea mai mică rădăcină pozitivă a acestei ecuaţii este t=0,3313 s. La acest moment x_1=x_2= −0,0299 m.

4.4*.

1) Bila ajunge în dreptul corpului 2 cu viteza $v_1 = \sqrt{2gh}$. Ciocnirea fiind perfect elastică, vitezele corpurilor după ciocnire vor fi:

$$v_1' = v_1 - \frac{(v_1 - 0)(1 + 1)}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} v_1,$$

$$v_2' = 0 + \frac{(v_1 - 0)(1 + 1)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1,$$

Bila se va ridica în sus, iar corpul 2 începe să efectueze o mişcare oscilatorie armonică cu pulsaţia $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$. El ajunge înapoi în aceeaşi poziţie după o semiperioadă a mişcării $\left(\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_n}\right)$. Următoarea ciocnire

Scanned with OKEN Scanner

are loc în această poziţie dacă timpul de urcare şi coborîre al bilei $t_u + t_c = \frac{2|v_1'|}{g}$ este un multiplu întreg al semiperioadei $\frac{T}{2}$. Astfel, pentru determinarea înălţimii h se obţine ecuaţia $\frac{2|v_1'|}{g} = \frac{\pi}{\omega_n}$ sau după înlocuiri:

$$\frac{2}{g}\,\frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\sqrt{2gh} = \pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}\,n.$$

De aici rezultă

$$h = \frac{\pi^2}{8}\,\frac{m_2 g}{k}\left(\frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}\right)^2 n^2.$$

Valoarea minimă a înălţimii se obţine pentru $n=1$.

$$h_{min} = \frac{\pi^2}{8}\,\frac{4\cdot 9{,}81}{340}\left(\frac{4+0{,}4}{4-0{,}4}\right)^2 = 0{,}2127 \text{ m}.$$

2) Înainte de a doua ciocnire viteza bilei este $|v_1'|$, iar viteza corpului $2-v_2'$ (sensul pozitiv este în jos). Viteza bilei după această ciocnire va fi:

$$v_1'' = v_1' - \frac{\left[|v_1'| - (-v_2')\right](1+1)}{1+\frac{m_1}{m_2}} = |v_1'| - (|v_1'| + v_2')\,\frac{2}{1+\frac{m_1}{m_2}},$$

$$|v_1'| + v_2' = \frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\,v_1 + \frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}}\,v_1 = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\,v_1 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}\,v_1 = v_1.$$

Rezultă

$$v_1'' = \frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\,v_1 - \frac{2}{1+\frac{m_1}{m_2}}\,v_1 = -v_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza corpului 2 după a doua ciocnire va fi

$$v_2'' = -v_2' - \left[|v_1'| - (-v_2')\right] \frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = -\frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}} v_1 + \frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}} v_1 = 0.$$

Deci, după cea de a doua ciocnire viteza corpului 2 se anulează şi $|v_1''| = v_1$. Înseamnă că bila se va ridica pînă în poziţia de unde a pornit iniţial şi apoi totul se repetă. Prin urmare în aceste condiţii mişcarea este periodică, perioada T_1 fiind egală cu suma dintre timpul de coborîre al bilei, durata vibraţiei corpului 2 $\left(n\frac{T}{2}\right)$ şi timpul de urcare al bilei: $T_1 = t_c + n\frac{T}{2} + t_u$. Înlocuind $t_c + t_u = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$, unde h are valoarea determinată la punctul 1) şi $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$, se obţine

$$T_1 = \pi n \sqrt{\frac{m_2}{k}} \cdot \frac{2m_2}{m_2 - m_1}$$

Pentru $n=1$ ($h = h_{min} = 0{,}2127$ m) rezultă $T_1 = 0{,}757$ s.

3) Diagramele mişcării celor două corpuri în cazul $n=1$ sînt reprezentate pentru o perioadă a mişcării în fig. IV.4.

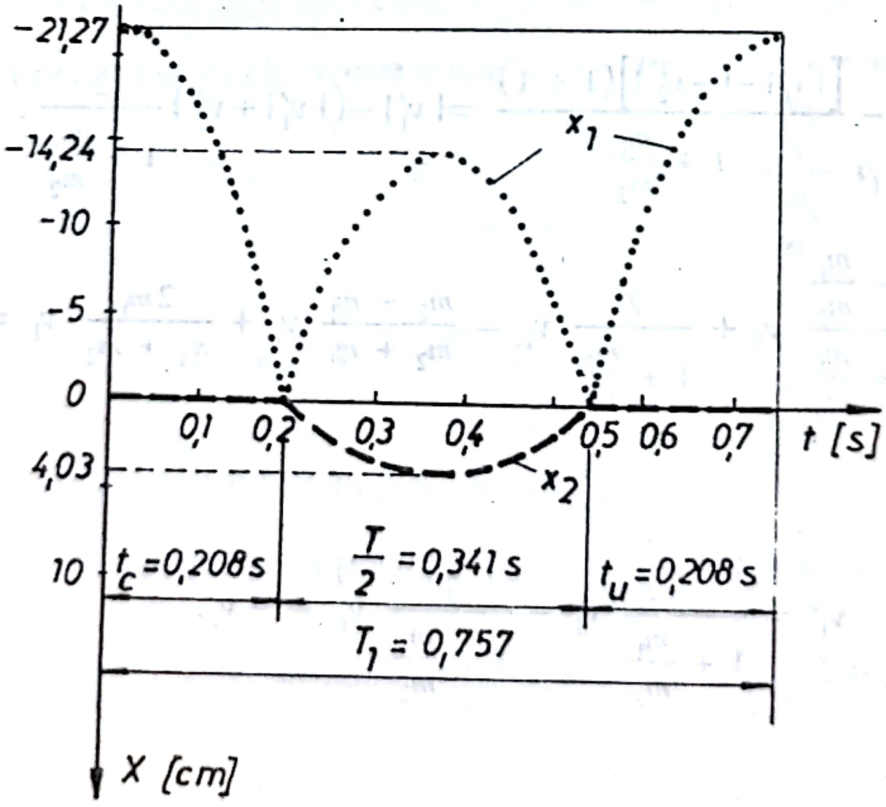


Fig. IV.4

Scanned with OKEN Scanner

4.5.

1) $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$,

$$v'_{3\,max} = \frac{(1+k_1)(1+k_2)}{\left(1+\sqrt{\frac{m_3}{m_1}}\right)^2} v_1$$

Pentru m_1=0,4 kg; m_3=0,9 kg; $k_1=k_2$=0,6, rezultă m_2=0,6 kg; $v'_{3\,max}$=0,4096 v_1.

2) $k_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}$. Deoarece $k_2<1$, există soluție numai dacă $m_1<m_3$.

Pentru m_1=0,4 kg și m_3=0,9 kg se obține k_2=0,666.

4.6*. Vitezele corpurilor după ce se ciocnesc se calculează cu relațiile

$$v'_1 = v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(1+1)}{1+\frac{m_1}{m_2}} = v_1 - \frac{2}{1+\lambda}(v_1 - v_2) \qquad (1)$$

$$v'_2 = v_2 + \frac{(v_1 - v_2)(1+1)}{1+\frac{m_2}{m_1}} = v_2 + \frac{2\lambda}{1+\lambda}(v_1 - v_2) \qquad (2)$$

La prima ciocnire (n=1), v_2=0, v_1=5$\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Cele două corpuri se mai întîlnesc dacă

$$v'_2 > 0 \quad \text{și} \quad |v'_1| < v'_2 \qquad (3)$$

După prima ciocnire ambele condiții sînt verificate dacă $\lambda \geq 1$.

După ciocnire corpurile efectuează mișcări rectilinii uniforme cu vitezele v'_1, respectiv v'_2. În urma ciocnirii corpului 2 cu limitatorul, viteza lui devine $-v'_2$. Astfel, pentru determinarea vitezelor după următoarea ciocnire, în relațiile (1) și (2) v_1 se înlocuiește cu v'_1 și v_2 cu $-v'_2$. Din condiția de întîlnire a celor două corpuri se pot determina relațiile cu care se calculează intervalul de timp dintre ciocniri și distanța dintre corpul 2 și limitator în momentul ciocnirii:

$$t = \frac{2d}{v'_1 + v'_2} \qquad (4) \qquad d' = \frac{v'_2 - v'_1}{v'_2 + v'_1} d. \qquad (5)$$

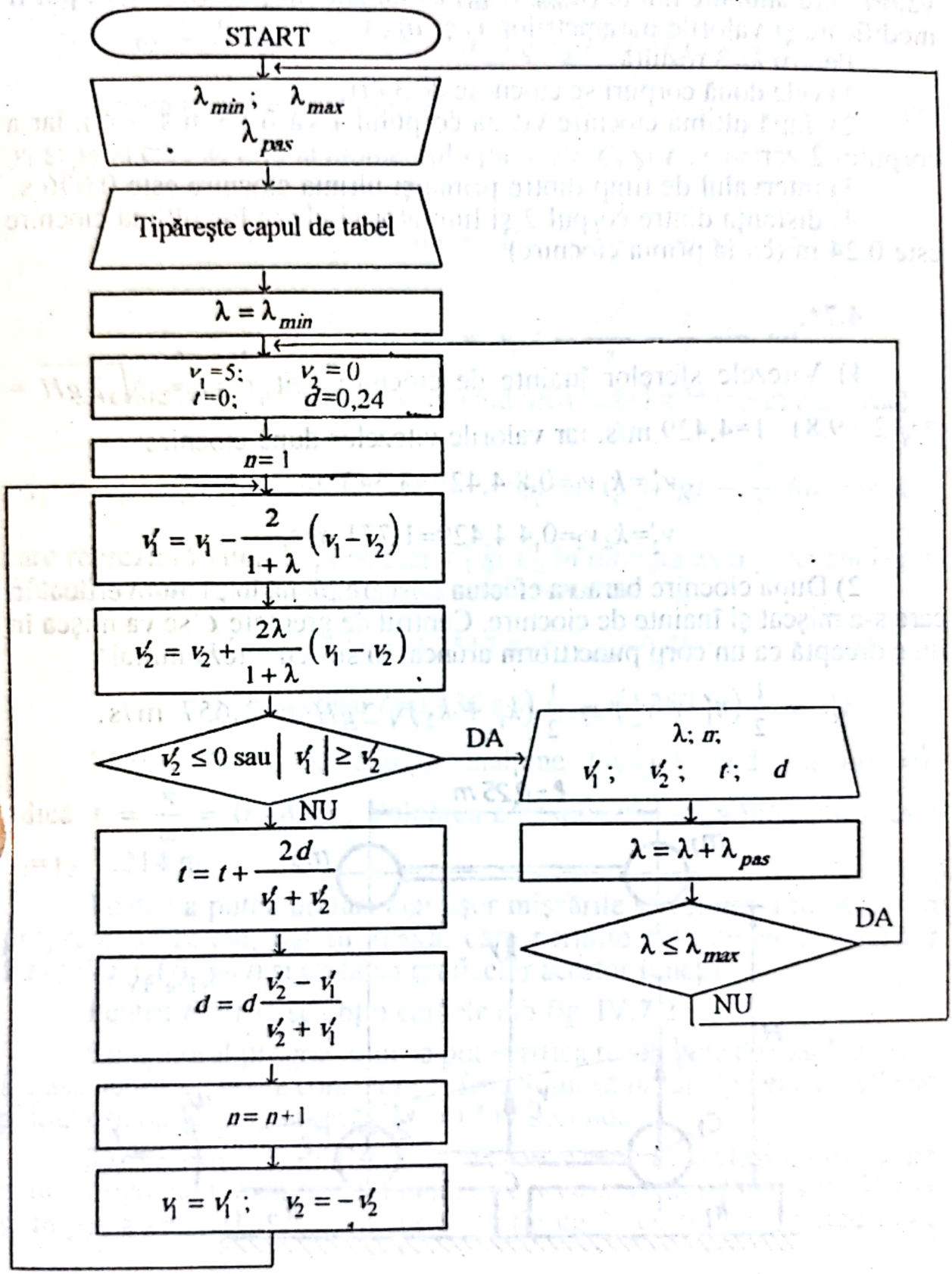
Scanned with OKEN Scanner

Aceste calcule ar trebui repetate pînă în momentul în care nu se mai verifică condițiile (3). Este mult mai avantajos să se întocmească un program pentru calculatorul electronic. Programul, care se bazează pe schemă logică alăturată, este

```
  5 REM P 4.6
 10 REM
 20 REM Ciocnire repetată
 30 REM
 35 DIM r$ (32)
 40 INPUT "Lmbdmin="; Lmbdmin;"
Lmbdmax="; Lmbdmax;" Lmbdpas="; Lmbdpas
 45 LPRINT : LPRINT "lmbd N v 1'/t v2' d" ' "
 50 LET lmbd=Lmbdmin
 60 LET v1=5: LET v2=0
 65 LET t=0: LET d=.24
 70 LET n=1
 80 LET v1p=v1– 2* (v1 – v2)/(1+lmbd)
 90 LET v2p=v2+2*lmbd* (v1 – v2) / (1+lmbd)
 93 IF (v2p<=0) OR (ABS (v1p)>=v2p) THEN GO TO 200
 95 LET t=t+2*d/ (v1p+v2p)
 97 LET d=d* (v2p – v1p)/ (v2p+v1p)
110 LET n=n+1
120 LET v1=v1p: LET v2= – v2p
130 GO TO 80
200 LET r$=STR$ lmbd
210 LET r$(6 TO 8)=STR$ n
220 LET r$(9 TO 18)=STR$ v1p
230 LET r$(20 TO)=STR$ v2p
240 LPRINT r$
243 LET r$=" " : LET r$(8 TO 17)=STR$ t
245 LET r$ (19 TO)=STR$ d
247 LPRINT r$
250 LET l mbd=l mbd+Lmbdpas
260 IF lmbd<=Lmbdmax+Lmbdpas*.0
00001 THEN GO TO 60
270 GO TO 40
```


Scanned with OKEN Scanner

Schema logică pentru programul P 4.6.



Scanned with OKEN Scanner

Programul a fost conceput astfel încît parametrului λ se pot da valori între anumite limite (λ_{min}, λ_{max}) cu un anumit pas. (Desigur, pot fi modificate şi valorile parametrilor v_1 şi d).

Pentru $\lambda=3$ rezultă:

1) cele două corpuri se ciocnesc de 3 ori;

2) după ultima ciocnire viteza corpului 1 va fi -5 m/s ($-v_1$), iar a corpului 2 zero;

3) intervalul de timp dintre prima şi ultima ciocnire este 0,096 s;

4) distanţa dintre corpul 2 şi limitator cînd are loc ultima ciocnire este 0,24 m (ca la prima ciocnire).

4.7*.

1) Vitezele sferelor înainte de ciocnire sînt $v_1=v_2=\sqrt{2gH}=$ $=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1}=4{,}429$ m/s, iar valorile vitezelor după ciocnire:

$$v_1'=k_1 v_1=0{,}8\cdot 4{,}429=3{,}543 \text{ m/s}.$$

$$v_2'=k_2 v_2=0{,}4\cdot 4{,}429=1{,}771 \text{ m/s}.$$

2) După ciocnire bara va efectua mişcare plană în planul vertical în care s-a mişcat şi înainte de ciocnire. Centrul de greutate C se va mişca în linie dreaptă ca un corp punctiform aruncat în sus cu viteza iniţială

$$v_C' = \frac{1}{2}(v_1' + v_2') = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\sqrt{2gH} = 2{,}657 \text{ m/s}.$$

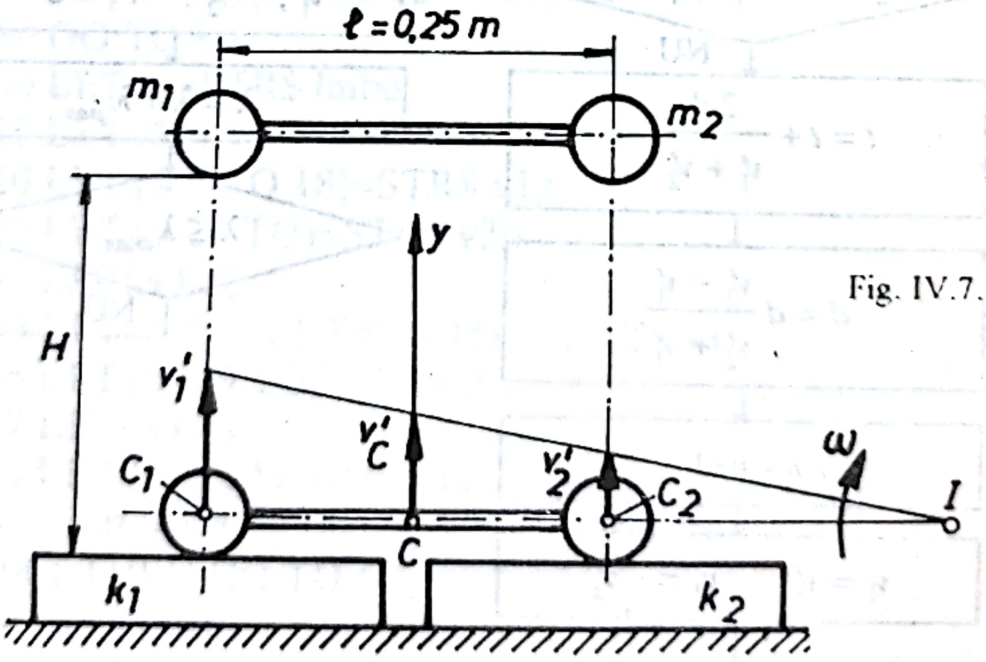


Fig. IV.7.1

În același timp bara se rotește în jurul unei axe orizontale ce trece prin C cu viteza unghiulară

$$\omega = \frac{v_1' - v_2'}{l} = \frac{1}{l}(k_1 - k_2)\sqrt{2gH} = 7{,}088 \text{ rad/s}.$$

Legea mișcării punctului C este $y_C = v_C' t - g\frac{t^2}{2}$, iar înălțimile y_1 și y_2 la care se află la momentul t punctele C_1 și C_2 sînt:

$$y_1 = y_C + \frac{l}{2}\sin \omega t = v_C' t - \frac{gt^2}{2} + \frac{l}{2}\sin \omega t$$

$$y_2 = y_C - \frac{l}{2}\sin \omega t = v_C' t - \frac{gt^2}{2} - \frac{l}{2}\sin \omega t.$$

Aceste înălțimi devin maxime cînd derivatele lor în raport cu timpul

$$\dot{y}_1 = v_C' - gt + \frac{1}{2} l\omega \cos \omega t, \qquad \dot{y}_2 = v_C' - gt - \frac{1}{2} l\omega \cos \omega t,$$

care reprezintă vitezele punctelor C_1 și C_2 în direcția axei y, se anulează. Efectuînd calculele, se obțin următoarele rezultate:

$\dot{y}_1' = 0$ pentru $t = 0{,}2517$ s și $y_{1max} = 0{,}480$ m

$\dot{y}_2' = 0$ pentru $t = 0{,}336$ s și $y_{2max} = 0{,}253$ m.

Sferele vor fi la aceeași înălțime ($y_1 = y_2$) cînd $\sin \omega t = 0$, adică $t = \frac{\pi}{\omega} = 0{,}443$ s. Valoarea corespunzătoare a înălțimilor este $y_1 = y_2 = 0{,}214$ m.

Pentru a putea urmări mai ușor mișcările sferelor s-a întocmit un program de calcul, dat în anexă, care permite determinarea valorilor funcțiilor $y_1(t)$, $y_2(t)$ și trasarea graficelor acestor funcții.

Pentru $H = 1$ m se obțin curbele din fig. IV.7.2.

Cu ajutorul programului se pot verifica rezultatele de mai înainte. De asemenea, se poate constata că sfera de masă m_1 ajunge mai repede pe planul orizontal, și anume după $t = 0{,}517$ secunde.

3) Pentru ca sferele să ajungă a doua oară în același moment, pe planul orizontal (ciocnire simultană) este necesar ca durata mișcării în sus și în jos a centrului de greutate C să fie egală cu timpul în care bara

Scanned with OKEN Scanner

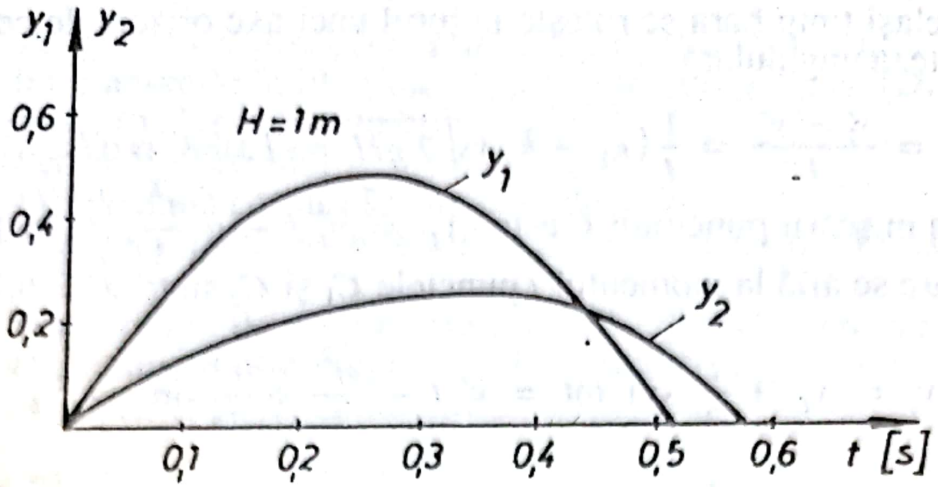


Fig. IV.7.2

efectuează o jumătate de rotaţie: $2\frac{v_c'}{g}=\frac{\pi}{\omega}$. Înlocuind în această egalitate v_C' şi ω în funcţie de H, se obţine ecuaţia

$$\frac{2}{g}\cdot\frac{1}{2}(k_1+k_2)\sqrt{2gH}=\frac{\pi l}{(k_1-k_2)\sqrt{2gH}},$$

din care

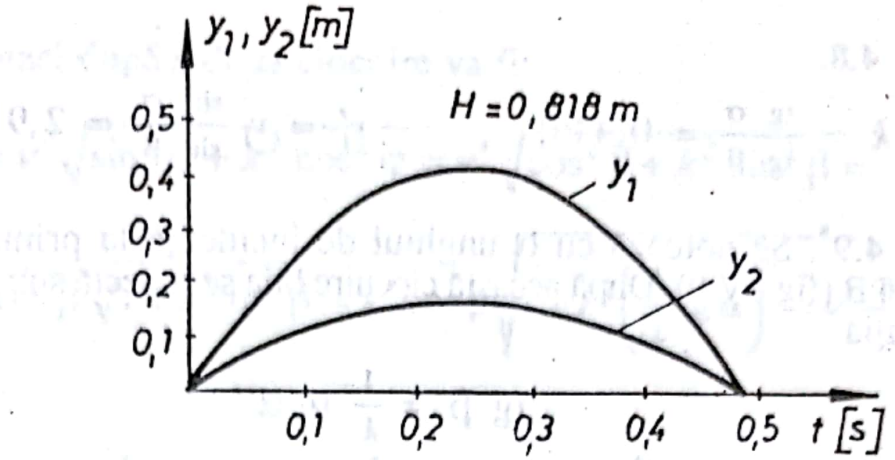
$$H=\frac{1}{2}\frac{\pi l}{k_1^2-k_2^2}=\frac{1}{2}\frac{\pi\cdot 0{,}25}{0{,}8^2-0{,}4^2}=0{,}818\text{ m}.$$

Pentru această valoare a lui H rezultă $v_1=v_2=4{,}006$ m/s; $v_1'=3{,}205$ m/s; $v_1'=1{,}602$ m/s; $\omega=6{,}412$ rad/s, iar intervalul de timp dintre ciocniri este $\frac{\pi}{\omega}=0{,}49$ s. În acest caz variaţia funcţiilor y_1 (t) şi y_2 (t) se prezintă în fig. IV.7.3.

Observaţie: Valoarea determinată a lui H reprezintă de fapt valoarea minimă necesară pentru ca sferele să ajungă şi a doua oară simultan pe planul orizontal. Alte valori se obţin punînd condiţia ca durata mişcării în sus şi în jos a centrului de greutate între cele două ciocniri să fie un multiplu întreg al semiperioadei mişcării de rotaţie. Astfel, dacă $H=2\cdot 0{,}818=1{,}636$ m bara efectuează pînă la următoarea ciocnire simultană a sferelor o rotaţie completă.

Scanned with OKEN Scanner

Fig. IV.7.3



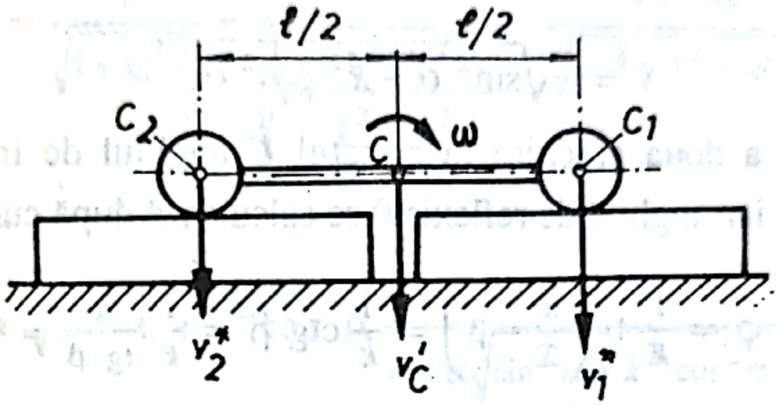


Fig. IV.7.4

4) În fig. IV.7.4 este reprezentată bara cu sferele înainte de a doua ciocnire simultană. În acest moment viteza centrului de greutate are aceeaşi valoare ca după prima ciocnire, iar vitezele sferelor sînt:

$$v_1^* = v_C' + \omega \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\sqrt{2gH} + \frac{1}{l}(k_1 - k_2)\sqrt{2gH}\,\frac{l}{2} = k_1\sqrt{2gH},$$

$$v_2^* = v_C' - \omega \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\sqrt{2gH} - \frac{1}{l}(k_1 - k_2)\sqrt{2gH}\,\frac{l}{2} = k_2\sqrt{2gH}.$$

După ciocnire vitezele vor avea valorile:

$$v_1^{*'} = k_2 v_1^* = k_1 k_2\sqrt{2gH}, \qquad v_2^{*'} = k_1 v_2^* = k_1 k_2\sqrt{2gH}.$$

Prin urmare:

$$v_1^{*'} = v_2^{*'} = k_1 k_2\sqrt{2gH} = 0{,}8 \cdot 0{,}4\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}818} = 1{,}282\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

După această ciocnire bara va efectua mişcare de translaţie rectilinie.

Scanned with OKEN Scanner

4.8.

$$k = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = 0{,}446; \qquad v_1' = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2{,}912 \text{ m/s}.$$

4.9*. Se notează cu α unghiul de incidență la prima ciocnire în punctul B (fig. IV.9). După această ciocnire bila se reflectă sub unghiul β dat de relația

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha$$

cu viteza

$$v' = v\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}.$$

Pentru a doua ciocnire în punctul C unghiul de incidență este $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$, iar unghiul de reflexie θ se calculează după cum urmează:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{k}\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{k}\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{k}\frac{1}{\frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Prin urmare $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, de unde rezultă că viteza $\vec{v}''$ este paralelă cu $\vec{v}$.

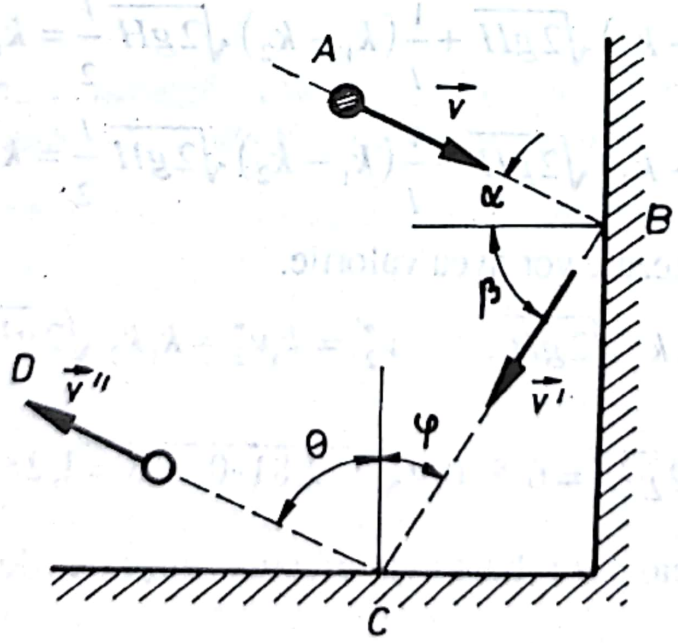


Fig. IV.9.

Valoarea vitezei după a doua ciocnire va fi:

$$v'' = v' \sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi} = v' \sqrt{\cos^2 \beta + k^2 \sin^2 \beta} =$$

$$= v' \cos\beta \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \beta} = v' \cos\beta \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha\right)^2} = v' \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

unde

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{k \cos\alpha}{\sqrt{\sin^2 + k^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Rezultă:

$$v'' = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} \frac{k \cos\alpha}{\cos\alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}} = kv.$$

4.10.

1) $h = R\sqrt{3} = 0{,}866\,\text{m}$; $\quad h_1 = \frac{h}{4} = 0{,}216\,\text{m}.$

2) $T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}(1 + \sin\alpha) = 1{,}26\,\text{s}.$

4.11*.

1) Bila ajunge pe planul înclinat cu viteza $v_1 = \sqrt{2gH}$, formînd cu normala la planul înclinat unghiul α.

Unghiul β pe care-l formează viteza $\vec{v}_1'$ după ciocnire cu normala şi valoarea vitezei se calculează cu relaţiile:

$$tg\beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha \ (1), \quad v_1' = v_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} \qquad (2)$$

Unghiul dintre viteza $\vec{v}_1'$ şi axa orizontală Ox este $\gamma = 90 - (\alpha + \beta)$. Distanţa $OB = b$ reprezintă bătaia aruncării oblice cu viteza iniţială $\vec{v}_1'$.

Scanned with OKEN Scanner

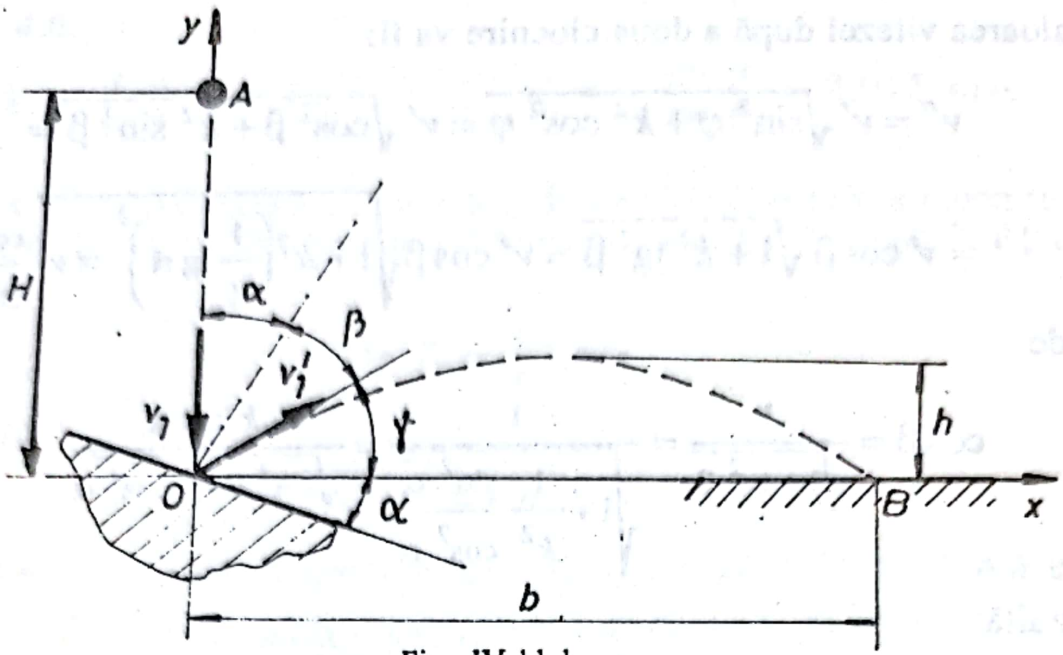


Fig. IV.11.1

Astfel:

$$b=\frac{v_1^2 \sin 2\gamma}{g}=\frac{2gH\left(\sin^2\alpha+k^2\cos^2\alpha\right)\sin 2(\alpha+\beta)}{g}= \qquad \cdot\beta) \qquad = \tag{3}$$

$$=2H\left(\sin^2\alpha+k^2\cos^2\alpha\right)\sin 2(\alpha+\beta).$$

Înălțimea h se calculează de asemenea cu relația cunoscută de la aruncarea oblică:

$$h=\frac{v_1^2}{2g}\sin^2\gamma=\frac{2gH\left(\sin^2\alpha+k^2\cos^2\alpha\right)}{2g}\cdot\cos^2(\alpha+\beta)= \tag{4}$$

$$=H(\sin^2\alpha+k^2\cos^2)\cos^2(\alpha+\beta.$$

Făcînd unele transformări trigonometrice și ținînd seamă de relația (1), expresiile (3) și (4) pot fi aduse la alte forme în care unghiul β nu mai apare:

$$b=2H(1+k)\sin 2\alpha\,(k\cos^2\alpha-\sin^2\alpha), \tag{5}$$

$$h=H(k\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca problema să aibă sens, pentru b trebuie să rezulte valori pozitive, adică trebuie să fie verificată condiția

$$\operatorname{tg}\alpha<\sqrt{k}. \tag{7}$$

În cazul particular $k=0{,}5$; $\alpha=25°$, această condiție este verificată și pentru b și h rezultă valorile:

$$b=0{,}533H; \qquad h=0{,}0539H.$$

2) Se calculează derivata lui b în raport cu α:

$$\frac{db}{d\alpha}=2H(1+k)\,[2\cos 2\alpha\,(k\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\sin 2\alpha\,(-2k\cos\alpha\sin\alpha-$$
$$-2\sin\alpha\cos\alpha)]=2H(1+k)\,[2\cos 2\alpha\,(k\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-(1+k)\sin^2 2\alpha].$$

Folosind relațiile trigonometrice $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ și $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, derivata se poate exprima în funcție numai de $\cos 2\alpha$:

$$\frac{db}{d\alpha}=2H(1+k)\,[2(1+k)\cos^2 2\alpha-(1-k)\cos 2\alpha-(1+k)]. \tag{8}$$

Egalînd cu zero derivata, se obține ecuația

$$2(1+k)\cos^2 2\alpha-(1-k)\cos 2\alpha-(1+k)=0. \tag{9}$$

Din condiția (7) rezultă că $\alpha<45°$ și astfel $\cos 2\alpha>0$. Soluția ecuației (9), care satisface această condiție, este

$$\cos 2\alpha=\frac{1-k+\sqrt{9k^2+14k+9}}{4(1+k)}. \tag{10}$$

Relația (10) determină valoarea unghiului α în funcție de k pentru care bătaia b este maximă.

a) Pentru $k=1$ rezultă $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\alpha=22{,}5°$. În acest caz $b_{max}=2H$.

Pentru $k=0{,}5$ în fig. IV.11.2 s-a reprezentat $\frac{b}{H}$ în funcție de α. Valoarea maximă se obține pentru $\alpha=18{,}66°$ și $b_{max}=0{,}63\ H$.

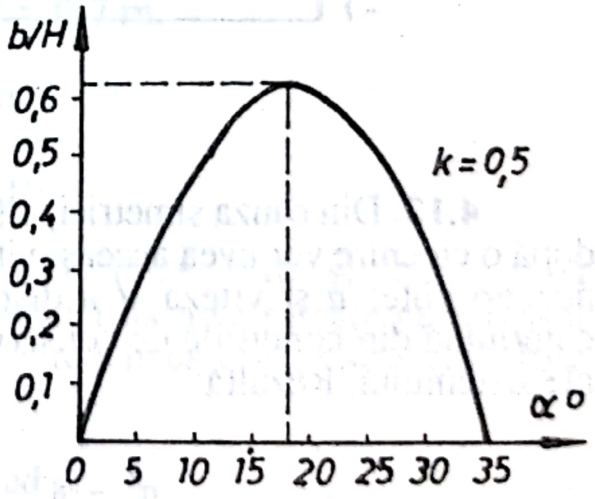
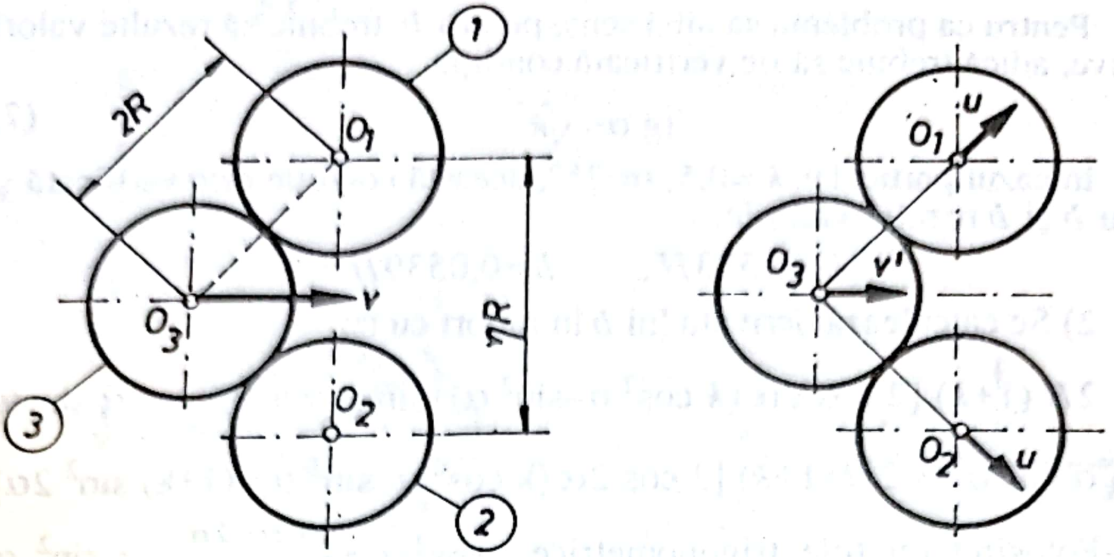


Fig. IV.11.2



Înainte de ciocnire Fig. IV.12.1 *După ciocnire*

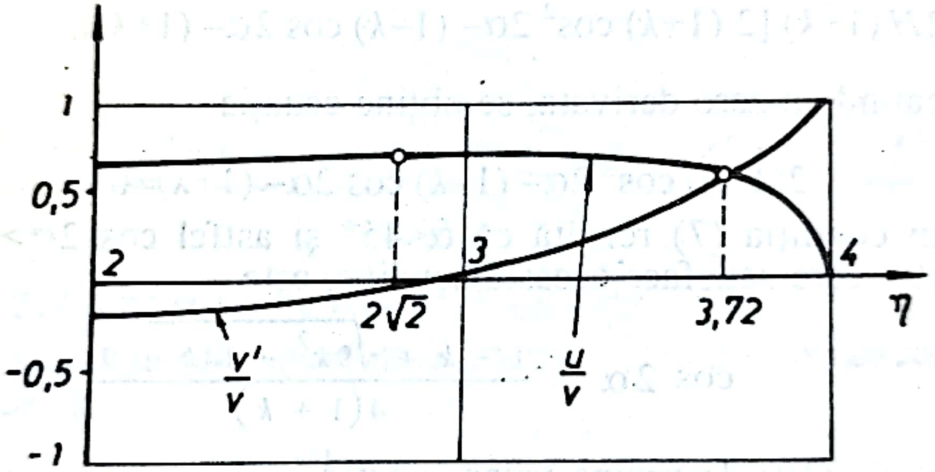


Fig. IV.12.2

4.12. Din cauza simetriei, discurile 1 şi 2, care iniţial stau în repaus, după o ciocnire vor avea aceeaşi viteză u (fig. IV.12.1). Astfel, avem două necunoscute: u şi viteza v' a discului 3 după ciocnire. Acestea se pot determina din condiţiile de conservare a impulsului şi a energiei cinetice ale sistemului. Rezultă:

$$v' = v\,\frac{\eta^2 - 8}{24 - \eta^2}; \qquad u = \frac{4v\sqrt{16 - \eta^2}}{24 - \eta^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea minimă a parametrului η este 2 (în acest caz discurile 1 şi 2 se ating), iar valoarea maximă 4 (dacă $\eta>4$ nu se produce ciocnire), deci funcţiile $v'(\eta)$ şi $u(\eta)$ sînt definite pentru $\eta\in[2, 4]$. În fig.IV.12.2 aceste funcţii sînt reprezentate grafic. Viteza v' se anulează pentru $\eta=2\sqrt{2}$. Deci sînt posibile următoarele cazuri:

a) $\eta \in [2, 2\sqrt{2})$ discul 3 se întoarce după ciocnire;

b) $\eta=2\sqrt{2}$ discul 3 se opreşte după ciocnire;

c) $\eta \in (2\sqrt{2}, 4]$ discul merge mai departe cu o viteză mai mică.

Viteza u este pozitivă, fiind maximă pentru $\eta=2\sqrt{2}$ (cînd discul 3 se opreşte după ciocnire) şi $u_{max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}v=0{,}707\ v$.

4.13.

1) $$h=\frac{H}{\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)^2}=0{,}622\text{ m}.$$

2) $$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}=0{,}7071;\quad a=0{,}497\text{ m};\quad b=0{,}703\text{ m};$$

$$h_{max}=\frac{1}{4}\frac{m_1}{m_2}H=0{,}7\text{ m}.$$

4.14.

1) $v'=-1{,}793$ m/s; $\omega'=0{,}755$ rad/s.

2) Se produce încă o ciocnire între bilă şi bară după $t_1=0{,}4053$ secunde. Între cele două ciocniri bara se roteşte cu unghiul $\theta_1=\omega' t_1=0{,}306$ rad, iar distanţa dintre punctele în care se produc ciocnirile este $x_1=0{,}079$ m.

3) $m_2=\dfrac{3}{4}m_1$; $\omega'=7.924$ rad/s.

4) În acest caz bila nu mai ajunge în contact cu bara.

Scanned with OKEN Scanner

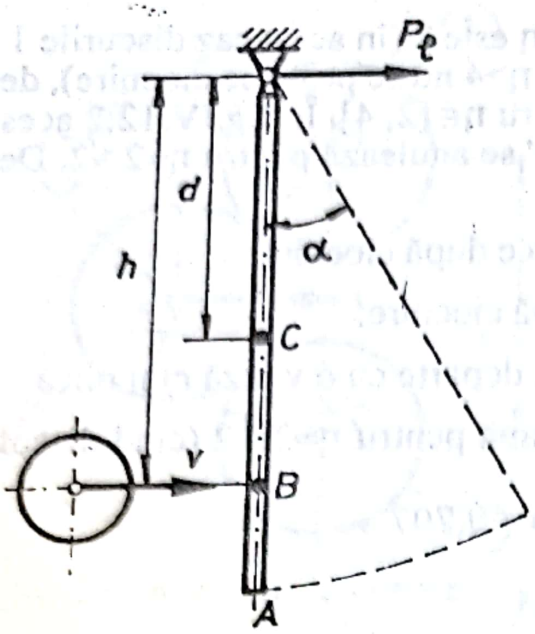


Fig. IV.15

4.15*.

1) Bara, avînd o axă fixă de rotaţie orizontală este un pendul fizic. Notăm cu v viteza necunoscută a bilei înainte de ciocnire, cu v' viteza bilei şi cu ω' viteza unghiulară a barei după ciocnire.

Pentru determinarea lui v' şi ω' în funcţie de v şi datele problemei, aplicăm teorema variaţiei momentului cinetic în raport cu axa de rotaţie.

Notînd cu J momentul de inerţie al barei în raport cu axa de rotaţie, avem:

$$J\omega'+mv'h-mvh=0. \qquad (1)$$

A doua ecuaţie se obţine din relaţia de definiţie a coeficientului de restituire, care în cazul nostru devine

$$k=\frac{\omega' h-v'}{v} \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (1) şi (2) rezultă:

$$v'=\left(1-\frac{1+k}{1+\frac{mh^2}{J}}\right)v \quad (3) \qquad \omega'=\frac{1+k}{h\left(1+\frac{J}{mh^2}\right)}v, \qquad (4)$$

unde $J=\frac{Ml^2}{3}$.

După ciocnire bara OA începe să se rotească în jurul articulaţiei O cu viteza unghiulară iniţială ω'. Pentru a determina relaţia de legătură dintre ω' şi unghiul maxim de deviere α, aplicăm teorema energiei cinetice între poziţia verticală şi cea finală. Notînd cu d distanţa de la centrul de greutate C la axa de rotaţie $\left(d=OC=\frac{l}{2}\right)$, avem:

$$0-\frac{J\omega'^2}{2}=-Mgd(1-\cos\alpha)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$J\omega'^2 = 4\,Mgd\,\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (5)$$

Din (5) rezultă

$$\omega' = 2\,\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{Mgd}{J}},$$

şi apoi din (4)

$$v = \frac{h}{1+k}\left(1+\frac{J}{mh^2}\right)\omega' = \frac{2h}{1+h}\left(1+\frac{J}{mh^2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{Mgd}{J}},$$

Înlocuind valoarea momentului de inerţie J şi a lui d se obţine în final:

$$v = \frac{h}{1+k}\left(1+\frac{Ml^2}{3mh^2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{6g}{l}} = 5{,}64\ \text{m/s}. \qquad (6)$$

2) Pentru a determina percuţia de legătură din articulaţia O aplicăm teorema variaţiei cantităţii de mişcare. Cum toate impulsurile sînt orizontale şi percuţia de legătură este orizontală. Avem:

$$M\omega' d + mv' - mv = P_l. \qquad (7)$$

Înlocuind în (7) valorile lui ω' şi v' şi efectuînd calculele rezultă:

$$P_l = (hMd - J)\frac{1+k}{J+mh^2}mv = 0. \qquad (8)$$

Acest rezultat se explică prin faptul că punctul B reprezintă pentru bara OA centrul de percuţie ($h=\frac{2}{3}l$).

4.16*. Prima dată trebuie să se determine viteza unghiulară a barei înainte de ciocnire. Pentru aceasta se aplică teorema energiei cinetice între poziţia iniţială şi cea verticală:

$$E_{c_2} - E_{c_1} = L_{1-2}, \qquad (1)$$

unde $E_{c_1}=0$ (bara pleacă din repaus),

$$E_{c_2} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m_1 l^2}{2}\frac{\omega^2}{2},$$

$$L_{1-2} = m_1 g\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha\right) = \frac{m_1 gl}{2}(1-\cos\alpha).$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind aceste valori în (1), rezultă

$$\frac{m_1 l^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_1 g l}{2}(1 - \cos \alpha),$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos \alpha)$$

şi

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81}{1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81}{2}} = 3{,}836 \text{ rad/s}.$$

Se notează cu ω' viteza unghiulară a barei şi cu v' viteza corpului C după ciocnire. Pentru determinarea acestora se aplică teorema variaţiei momentului cinetic

$$J\omega' + m_2 v' h - J\omega = 0, \tag{2}$$

şi formula de definiţie a coeficientului de restituire

$$k = \frac{v' - \omega' h}{\omega h}. \tag{3}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (2) şi (3), rezultă

$$\omega' = \frac{J - m_2 h^2 k}{J + m_2 h^2}\,\omega = \frac{\frac{3{,}2 \cdot 1^2}{3} - 7{,}5 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}6}{\frac{3{,}2 \cdot 1^2}{3} + 7{,}5 \cdot 0{,}7^2} 3{,}836 = -0{,}92 \text{ rad/s}; \tag{4}$$

$$v' = \frac{(1+k)J}{J + m_2 h^2}\,\omega h = \frac{1 + 0{,}6\,\frac{3{,}2 \cdot 1^2}{3}}{\frac{3{,}2 \cdot 1^2}{3} + 7{,}5 \cdot 0{,}7^2} 3{,}836 \cdot 0{,}7 = 1{,}6106 \text{ m/s}. \tag{5}$$

Semnul minus de la ω' arată că după ciocnire bara începe să se mişte în sens invers. Unghiul maxim de deviere β şi spaţiul parcurs s de corpul C pînă la oprire se pot determina cu teorema energiei cinetice.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$\cos\beta = 1 - \frac{\omega'^2 l}{3g} = 1 - \frac{0{,}92^2 \cdot 1}{3 \cdot 9{,}81} = 0{,}97125; \qquad \beta = 13°12'$$

$$s = \frac{v'^2}{2\mu g} = \frac{1{,}6106^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81} = 1{,}322 \text{ m}.$$

4.17. Se pune condiția ca punctul A să reprezinte pentru ciocan centrul de percuție și rezultă $x = \frac{l}{3}$.

4.18.

1) Ca să nu apară percuție de legătură în lagărul O, poziția cuțitului de izbire trebuie să coincidă cu centrul de percuție al ciocanului pendul, adică distanța h trebuie să fie egală cu lungimea redusă a pendulului.

Deci $h = l_r = \frac{J_O}{Md}$,

unde:

$$d = OC = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2\left(l + \frac{d}{2}\right)}{m_1 + m_2} = 0{,}75 \text{ m}$$

$$J_0 = \frac{m_1 l^2}{3} + \left[\frac{m_2 d^2}{8} + m_2\left(l + \frac{d}{2}\right)^2\right] = 15{,}492 \text{ kgm}^2.$$

Rezultă $h = 0{,}826$ m.

2) Viteza ciocanului, cînd ajunge în dreptul epruvetei, poate fi calculată cu teorema energiei cinetice, care se exprimă prin relația

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_2^2 = Mgh_1,$$

în care: $h_1 = d + d\cos(180 - \varphi_1) = 1{,}4$ m; $J_0 = Mdl_r$ și $\omega_2 = \frac{v_2}{h}$ (v_2 reprezintă viteza căutată). Rezultă

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gl_1h}{d}} = 5{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Energia consumată la ruperea epruvetei este diferența dintre energiile cinetice ale ciocanului pendul înainte și după ciocnire, sau diferența dintre energiile potențiale din poziția inițială (dată de unghiul φ_1) și finală (corespunzătoare unghiului φ_2):

$$\Delta E_c = \Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = Mgh_1 - Mgh_2,$$

unde:

$$h_2 = d(1 - \cos\varphi_2) = 0{,}288 \text{ m};$$

$$\Delta E_p = Mg(h_1 - h_2) = 272{,}7 \text{ J}.$$

4.19*.

1) Se izolează cele două corpuri introducînd percuțiile de legătură ce apar în zona de contact. Acestea fiind percuții interioare au mărimi egale și sensuri opuse (fig. IV.19). Notăm cu ω_1' viteza unghiulară a volantului și cu ω_2' a ciocanului după ciocnire. Pentru determinarea lor aplicăm pentru volant și ciocan teorema variației momentului cinetic în raport cu axele lor de rotație, care conduce la ecuațiile

$$J_1\omega_1' - J_1\omega_1 = -P_{l_D}R \qquad (1)$$

$$J_2\omega_2' = P_{l_D}b. \qquad (2)$$

Ciocnirea fiind plastică, după ciocnire punctul de contact comun va avea aceeași viteză, adică

$$\omega_1' R = \omega_2' b. \qquad (3)$$

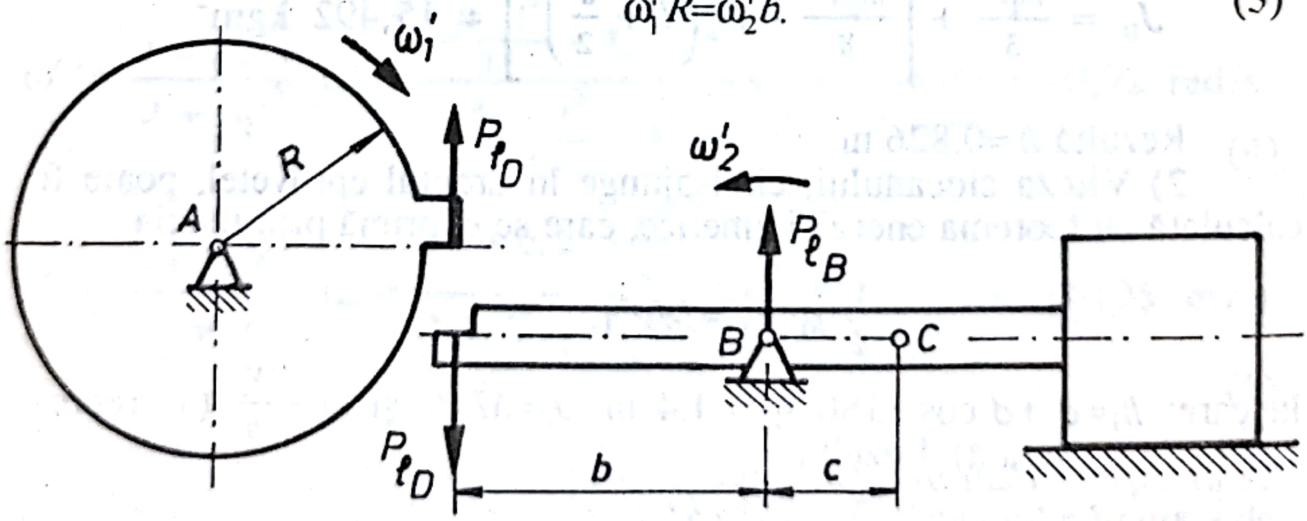


Fig. IV.19

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (1), (2), (3), rezultă

$$\omega_1' = \frac{J_1 b^2}{J_1 b^2 + J_2 R^2}\,\omega_1$$

$$\omega_2' = \frac{J_1 R b}{J_1 b^2 + J_2 R^2}\,\omega_1$$

$$P_{l_D} = \omega_2'\,\frac{J_2}{b} = \frac{J_1 J_2 R}{J_1 b^2 + J_2 R^2}\,\omega_1$$

2) Înainte de ciocnire, energia cinetică are numai volantul şi anume

$$E_{c_0} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$$

Energia cinetică a sistemului după ciocnire este

$$E_{c_1} = \frac{J_1 \omega_1'^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2'^2}{2}.$$

Astfel, pierderea de energie cinetică va fi

$$\Delta E_c = E_{c_0} - E_{c_1} = \frac{J_1}{2}\left(\omega_1^2 - \omega_1'^2\right) - \frac{J_2}{2}\,\omega_2'^2.$$

După efectuarea calculelor rezultă

$$\Delta E_c = \frac{J_1 J_2 R^2 \omega_1^2}{2\left(J_1 b^2 + J_2 R^2\right)}.$$

3) Pentru a determina percuţia de legătură P_{l_B} din articulaţia B, aplicăm ciocanului teorema variaţiei cantităţii de mişcare, care se exprimă prin ecuaţia

$$c\,\omega_2' M - 0 = P_{l_B} - P_{l_D}.$$

Din această ecuaţie se obţine

$$P_{l_B} = P_{l_D} + c\omega_2' M = \left(\frac{J_2}{b} + cM\right)\omega_2'$$

sau

$$P_{l_B} = \left(\frac{J_2}{b} + cM\right)\frac{J_1 R \cdot b\omega_1}{J_1 b^2 + J_2 R^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație: Ciocnirea dintre cele două corpuri fiind plastică, vitezele unghiulare ω_1' și ω_2' se pot determina și cu teorema lui Carnot, după care pierderea de energie cinetică din timpul ciocnirii este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute.

4.20.

$$\omega' = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\,\omega_0 = \frac{32}{32 + 16} \cdot 10{,}472 = 6{,}981\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. VIBRAȚII MECANICE

5.1. VIBRAȚII LIBERE NEAMORTIZATE

5.1*.

1) Cunoscînd frecvența vibrațiilor, se poate determina pulsația $\omega_n=2\pi f$, iar constanta elastică a arcului este

$$k=m\,\omega_n^2=m\,4\pi^2 f^2=1{,}5\cdot 4\pi^2 5^2=1\,480{,}44\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

2) Singura forță ce acționează asupra corpului C în direcți mișcării fiind forța elastică $-kx$, ecuația diferențială a mișcării este

$$m\ddot{x}+kx=0.$$

Legea mișcării corpului este de forma

$$x=x_0\cos(\omega_n t+\varphi);\quad \omega_n=2\pi 5=31{,}41\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Din condiția că la $t=0$, $v=\dot{x}=0$, rezultă $\varphi=0$, așa încît

$$x=x_0\cos\omega_n t.$$

Viteza, respectiv accelerația mișcării sînt

$$v=\dot{x}=-x_0\omega_n\sin\omega_n t;\quad a=\ddot{x}=-x_0\omega_n^2\cos\omega_n t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$v_{max}=x_0\,\omega_n=0{,}006\cdot 31{,}41=0{,}188\ \text{m/s}$$

$$a_{max}=x_0\,\omega_n^2=0{,}006\cdot 31{,}41^2=5{,}92\ \text{m/s}^2.$$

3) Forţa elastică maximă din arc este

$$F_{max}=kx_0=1480{,}44\cdot 0{,}006=8{,}88\ \text{N}.$$

5.2.

1) $$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{f_{st}}};\quad T_n=2\pi\sqrt{\frac{f_{st}}{g}}.$$

2) Dacă deplasarea x se măsoară din poziţia de echilibru static a corpului, ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$\frac{G}{g}\ddot{x}+kx=0,\quad k=\frac{G}{f_{st}}.$$

Condiţiile iniţiale fiind $x_0=-(l+f_{st}-a)$, $v_0=0$, rezultă legea de mişcare

$$x=-(l+f_{st}-a)\cos\omega_n t.$$

3) Deformaţia maximă a arcului fiind $f_{st}+x_{max}$, $(x_{max}=l+f_{st}-a)$, forţa elastică maximă din arc este $F_{max}=k(f_{st}+x_{max})=\frac{G}{f_{st}}(f_{st}+x_{max})=$

$$=G\left(1+\frac{x_{max}}{f_{st}}\right).$$

Aplicaţie numerică: $T_n\approx 0{,}4$ s; $x=-2\cos 15{,}66\,t$; $F_{max}=3$ N.

5.3*.

1) Dacă deplasarea x se măsoară din poziţia în care arcul este nedeformat, legea mişcării rezultă

$$x=f_{st}+\lambda\cos\omega_n t, \qquad (1)$$

unde

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}=\sqrt{\frac{9{,}81}{1\cdot 10^{-2}}}=31{,}32\ \text{s}^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eforturile N_1 şi N_2 se determină scriind condiţiile de echilibru al forţelor concurente în punctul A (fig. V.3.1).

Rezultă

$$N_1 = N_2 = N = \frac{k}{2\cos\alpha}\, x, \quad k = \frac{G}{f_{st}}, \qquad (2)$$

sau în funcţie de timp

$$N = \frac{G}{2 f_{st} \cos\alpha}\left(f_{st} + \lambda \cos\omega_n t\right),$$

N_{max}=36,329 N; N_{min}=–21,192 N.

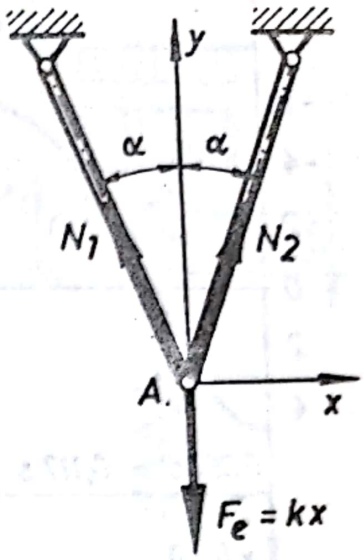


Fig. V.3.1

Corpul efectuează mişcare oscilatorie armonică, iar efortul N variază tot armonic (fig.V.3.2, *a* şi *b*), barele fiind supuse la solicitare alternant nesimetrică.

2) Firul flexibil şi inextensibil introdus între corp şi arc poate fi supus numai la întindere. Tensiunea din fir fiind egală cu forţa elastică kx, legea mişcării (1) este valabilă numai pentru $x > 0$. Din momentul în care x se anulează arcul rămîne nedeformat, iar corpul se mişcă numai sub

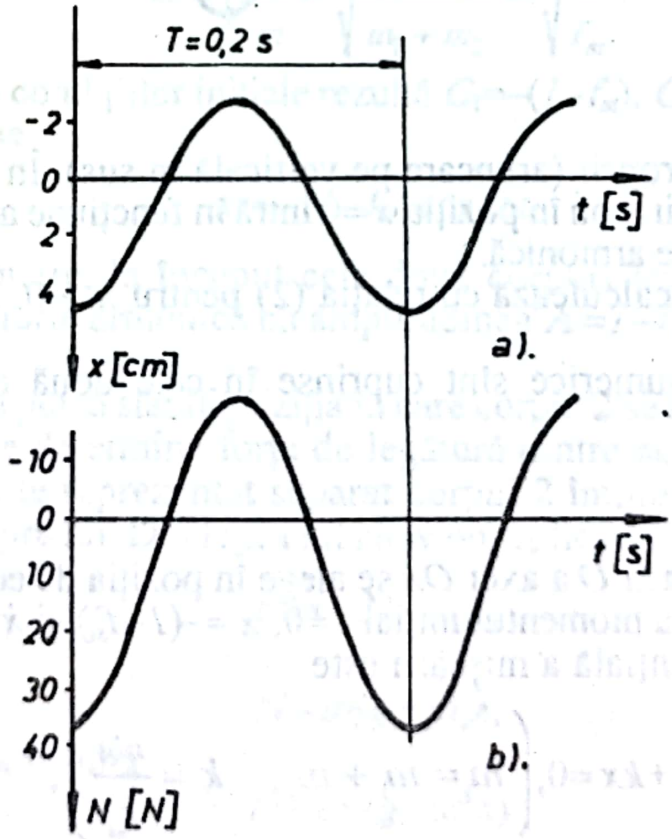


Fig. V.3.2

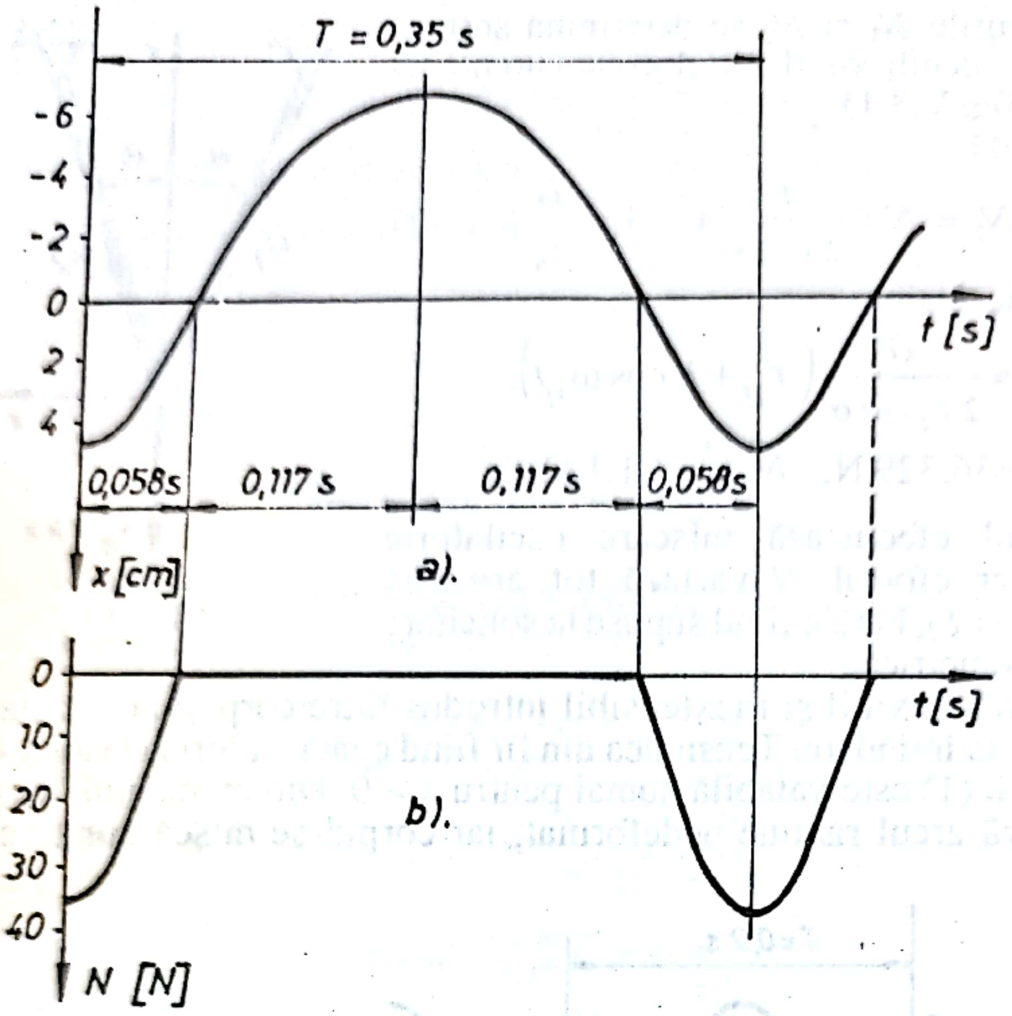


Fig. V.3.3

acţiunea greutăţii proprii (aruncare pe verticală în sus). În momentul în care corpul ajunge din nou în poziţia $x=0$ intră în funcţiune arcul şi mişcarea devine oscilatorie armonică.

Efortul N se calculează cu relaţia (2) pentru $x>0$, şi $N=0$ pentru $x<0$.

Rezultatele numerice sînt cuprinse în cele două diagrame din fig. V.3.3, *a* şi *b*.

5.4*.

1) Dacă originea O a axei Ox se alege în poziţia de echilibru static (fig. V. 4.1, *a* şi *b*), la momentul iniţial $t=0$, $x=-(l-f_{st})$ şi $\dot{x}=0$.

Ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$m\ddot{x}+kx=0, \left(m=m_1+m_2, \quad k=\frac{mg}{f_{st}} \right),$$

Scanned with OKEN Scanner

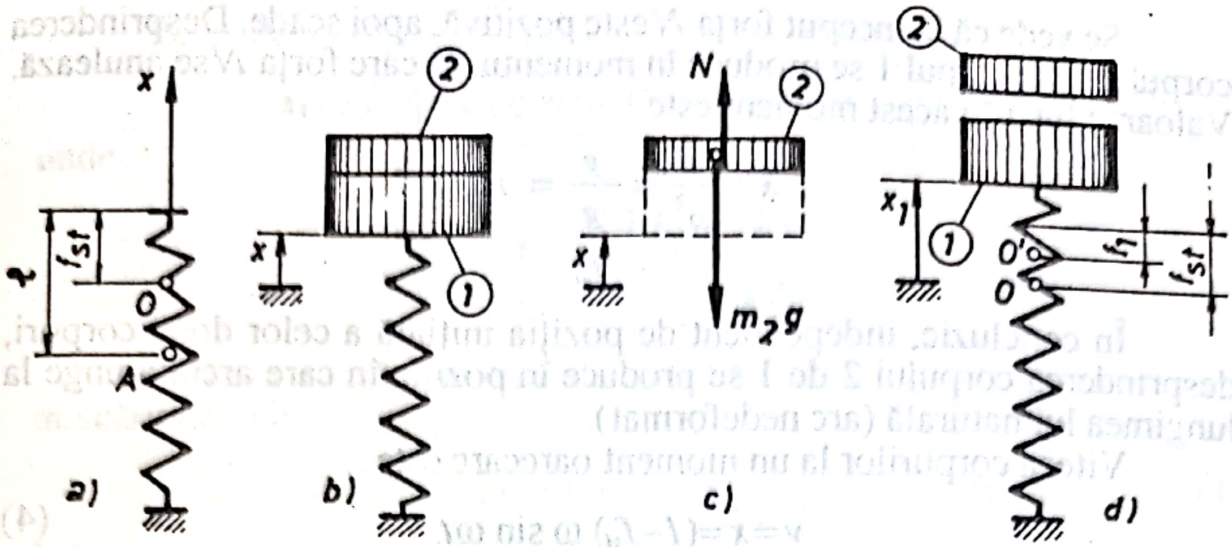


Fig. V.4.1

avînd soluţia de forma

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,$$

unde

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}=\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}. \qquad (1)$$

Pe baza condiţiilor iniţiale rezultă $C_1=-(l-f_{st})$, $C_2=0$, aşa încît legea mişcării devine

$$x=-(l-f_{st})\cos\omega t. \qquad (2)$$

Prin urmare, la început cele două corpuri împreună efectuează mişcare oscilatorie armonică cu amplitudinea $A=l-f_{st}$ şi cu pulsaţia dată de relaţia (1).

Pentru a putea stabili poziţia în care corpul 2 se desprinde de corpul 1, trebuie să se determine forţa de legătură dintre cele două corpuri. În fig. V.4.1, *c* este reprezentat separat corpul 2 împreună cu forţele care acţionează asupra lui. Din legea lui Newton, aplicată pentru acest corp

$$m_2\ddot{x}=N-m_2g,$$

rezultă

$$N=m_2g+m_2\ddot{x},$$

sau, deoarece $\ddot{x}=-\omega^2x$

$$N=m_2(g-\omega^2x) \qquad (3)$$

Se vede că la început forța N este pozitivă, apoi scade. Desprinderea corpului 2 de corpul 1 se produce în momentul în care forța N se anulează. Valoarea lui x în acest moment este

$$x=\frac{g}{\omega^2}=\frac{g}{\frac{g}{f_{st}}}=f_{st}.$$

În concluzie, independent de poziția inițială a celor două corpuri, desprinderea corpului 2 de 1 se produce în poziția în care arcul ajunge la lungimea lui naturală (arc nedeformat).

Viteza corpurilor la un moment oarecare este

$$v=\dot{x}=(l-f_{st})\,\omega\sin\omega t. \tag{4}$$

Momentul desprinderii $t=t_B$ se poate determina din legea mișcării (2), înlocuind $x=f_{st}$. Deci, t_B este soluția ecuației

$$f_{st}=-(l-f_{st})\cos\omega t_B. \tag{5}$$

Se verifică ușor că ecuația are soluție numai dacă $l>2\,f_{st}$. Viteza în momentul desprinderii poate fi determinată înlocuind $t=t_B$ în (4):

$$v_B=(l-f_{st})\,\omega\sin\omega t_B, \tag{6}$$

sau cu relația

$$v_B=\omega\sqrt{l^2-2\,f_{st}l}, \tag{7}$$

ce se obține din (5) și (6) prin eliminarea timpului.

Cu datele numerice din enunț rezultă $v_B=0{,}8336\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2) După desprindere corpul 2 se mișcă numai sub acțiunea greutății (aruncare pe verticală în sus), iar corpul 1 efectuează mișcare oscilatorie armonică în jurul noii poziții de echilibru static, (fig. V.4.1, *d*), în care deformația arcului este

$$f_1=\frac{m_1g}{k}=\frac{m_1g}{\frac{(m_1+m_2)g}{f_{st}}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}f_{st}=\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}f_{st}. \tag{8}$$

Condițiile inițiale pentru aceste mișcări sînt:

$$t=t_B,\ x=f_{st},\ \dot{x}=v_B.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru corpul 1 legea mişcării este de forma

$$x_1=f_{st}-f_1+C_3\cos\omega_1(t-t_B)+C_4\sin\omega_1(t-t_B),$$

unde

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\sqrt{\frac{g}{f_1}}. \tag{9}$$

Pe baza condiţiilor iniţiale rezultă $C_3=f_1$, $C_4=\frac{v_B}{\omega_1}$, şi astfel legea mişcării devine

$$x_1=f_{st}-f_1+f_1\cos\omega_1(t-t_B)+\frac{v_B}{\omega_1}\sin\omega_1(t-t_B). \tag{10}$$

Viteza acestui corp este

$$v_1=\dot{x}_1=-f_1\omega_1\sin\omega_1(t-t_B)+v_B\cos\omega_1(t-t_B). \tag{11}$$

Legea mişcării şi viteza corpului 2 se pot scrie direct:

$$x_2=f_{st}+v_B(t-t_B)-\frac{g}{2}(t-t_B)^2 \tag{12}$$

$$v_2=\dot{x}_2=v_B-g(t-t_B). \tag{13}$$

Cele două corpuri se întîlnesc în momentul $t=t_C$ în care $x_1=x_2=x_C$

Pentru determinarea parametrilor t_C, x_C şi a vitezelor $v_1(t_C), v_2(t_C)$ s-a întocmit un program de calcul, elaborat pe baza schemei logice prezentate în pag. 228.

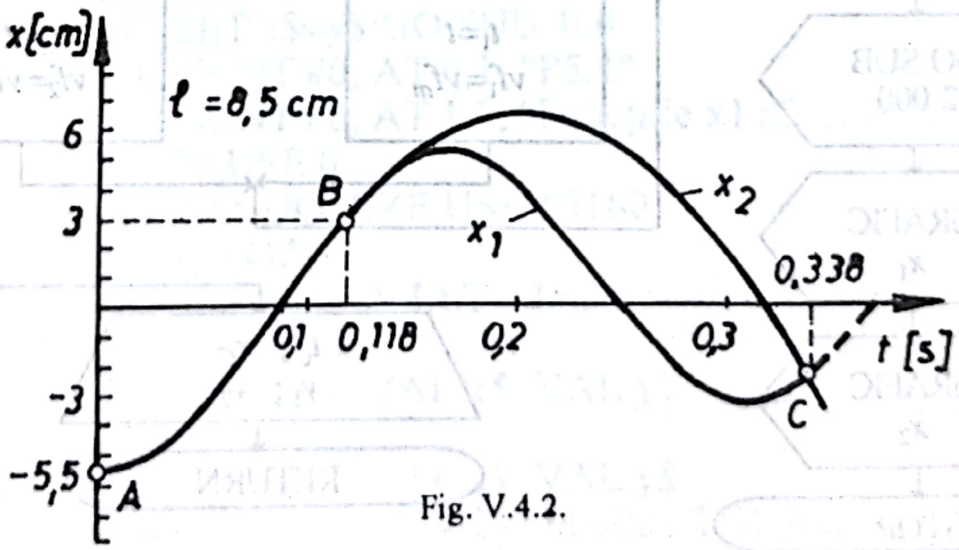
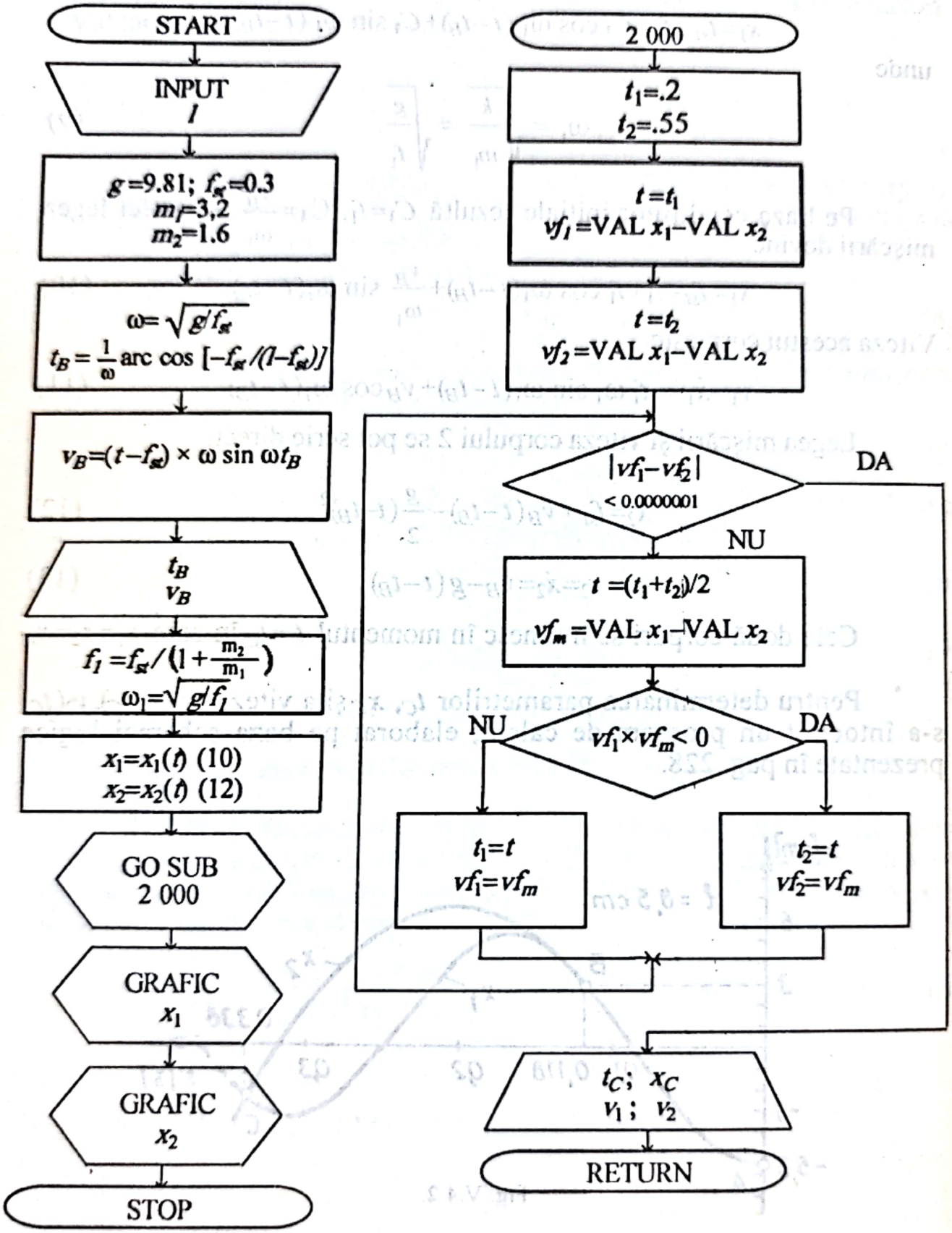


Fig. V.4.2.

Schema logică pentru programul P.5.4.



Scanned with OKEN Scanner

Programul cuprinde, în afara rezolvării ecuației $x_1(t) - x_2(t) = 0$, calculul parametrilor x_C, $v_1(t_C)$, $v_2(t_C)$ și determinarea parametrilor t_B, v_B, precum și reprezentarea grafică a legilor de mișcare ale corpurilor în cele două faze ale mișcării.

În continuare se redă programul, iar după acesta sînt date rezultatele numerice [t_B, v_B, t_C, x_C, $v_1(t_C)$, $v_2(t_C)$] pentru l=0,085 m.

```
700>REM
705 REM P 5.4
707 REM
708 INPUT "l=": l
710 LET g=9.81: LET fst=.03:'LE
T m1=3.2: LET m2=1.6
720 LET w=SQR (g/fst)
730 LET tb=ACS (–fst/ (1–fst))/w
740 LET vb=(1–fst)*w*SIN (w*tb)
745 LPRINT "P14.4" ' "tB=": tb,"v
B=": vb
750 LET f1=fst/ (1+m2/m1): LET w
1=SQR (g/f1)
760 LET×$="(fst–f1)+f1*COS (w1*
(x–tb))+(vb*SIN (w1* (x–tb)))/w1)*
(x>tb)–(1–fst)*COS (w*x)*(x<=tb)"
770 LET y$="(fst+vb*(x–tb)–g*
(x–tb)*(x–tb)/2)*(x>tb)–(1–fst)*COS
(w*x)*(x<=tb)"
775 GO SUB 2000
780 LET e$=x$: GO SUB 480
790 LET e$=y$:GO SUB 480
810 PRINT #0; AT 0,1; "P5.4"
820 PRINT #0; AT 1,1; "Funcțiile x1 x2 pt.l="; l
830 PAUSE 0
900 RANDOMIZE USR 65160
1000 STOP
2000 LET x1=.2: LET x2=.55
2010 LET x=x1
2020 LET vf1=VAL x$–VAL y$
2030 LET x=x2
2040 LET vf2=VAL x$–VAL y$
2050 IF ABS (vf1–vf2)<.000001 THEN GO TO 2090
```


Scanned with OKEN Scanner

```
2060 LET x=(x1+x2)/2: LET vfm=VAL x$–VAL y$
2070 IF vf1*vfm<0 THEN LET x2=x:
LET vf2=vfm: GO TO 2050
2080 LET x1=x: LET vf1=vfm: GO TO 2050
2090 REM
2100 LPRINT "tc="; x1, "xc=";
VAL x$' "v1=";–f1*w1*SIN (w1*
(x1–tb))+vb*COS (w1* (x1–tb)),
"v2="; vb–g* (x1–tb)
2120 RETURN
```

```
tB=0.11876961    vB=0.83359163
tc=0.33874817    xc=–.023983483
vi=0.56973803    v2=–1.324398
```

Mişcarea corpurilor din momentul pornirii ($t=0$) pînă la întîlnire ($t=t_C$) poate fi urmărită pe baza diagramelor mişcării din fig. V.4.2, înregistrate cu ajutorul imprimantei.

3) Cele două corpuri se întîlnesc în aceeaşi poziţie ($x=f_{st}$), dacă durata mişcării corpului 2 din momentul desprinderii pînă ajunge înapoi în aceeaşi poziţie este egală cu timpul în care corpul 1 revine în poziţia $x=f_{st}$.

Înlocuind în (12) $x_2=f_{st}$, se obţine durata mişcării libere a corpului 2:

$$\Delta t_2=t_{2C}-t_B=\frac{2v_B}{g}. \qquad (14)$$

Înlocuind în (10) $x_1=f_{st}$, se obţine următoarea ecuaţie pentru determinarea duratei mişcării corpului 1, $\Delta t_1=t_{1C}-t_B$:

$$-f_1+f_1\cos\omega\Delta t_1+\frac{v_B}{\omega_1}\sin\omega\Delta t_1=0.$$

Folosind formulele trigonometrice $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ şi $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, ecuaţia poate fi transformată:

$$2\sin\frac{\omega_1\Delta t_1}{2}\left(\frac{v_B}{\omega_1}\cos\frac{\omega_1\Delta t_1}{2}-f_1\sin\frac{\omega_1\Delta t_1}{2}\right)=0. \qquad (15)$$

Ea este verificată dacă $\sin\frac{\omega_1\Delta t_1}{2}=0$, de unde rezultă $\frac{\omega_1\Delta t_1}{2}=n\pi$, respectiv

$$\Delta t_1=n\frac{2\pi}{\omega_1}. \qquad (16)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această soluție, independentă de v_B, este evidentă deoarece reprezintă un multiplu întreg al perioadei vibrației libere a corpului 1.

Egalînd cu zero expresia din paranteză, se obține ecuația

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_1 \Delta t_1}{2}=\frac{v_B}{\omega_1 f_1}=\frac{\omega_1 v_B}{\omega_1^2 f_1}=\frac{\omega_1 v_B}{g}, \tag{17}$$

din care rezultă alte valori pentru Δt_1.

Valoarea deformației inițiale l se determină din condiția $\Delta t_1=\Delta t_2$. Folosind pentru Δt_1 rezultatul (16), se obține ecuația $\omega_1 v_B=n\pi g$ sau, ținînd seama de (7)

$$\omega_1 \omega \sqrt{l^2-2 f_{st} l}=n\pi g. \tag{18}$$

Înlocuind $\omega=\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$, $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{f_1}}$, ecuația devine

$$l^2-2 f_{st} l-n^2\pi^2 f_1 f_{st}=0.$$

Soluția pozitivă a acesteia este

$$l=f_{st}\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2\frac{f_1}{f_{st}}}\right)=f_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{1+\frac{m_2}{m_1}}}\right). \tag{19}$$

Valoarea numerică cea mai mică a lui l, ce se obține pentru $n=1$, este $l=0{,}1126$ m. Pentru acest caz diagramele mișcării sînt date în fig. V.4.3, iar

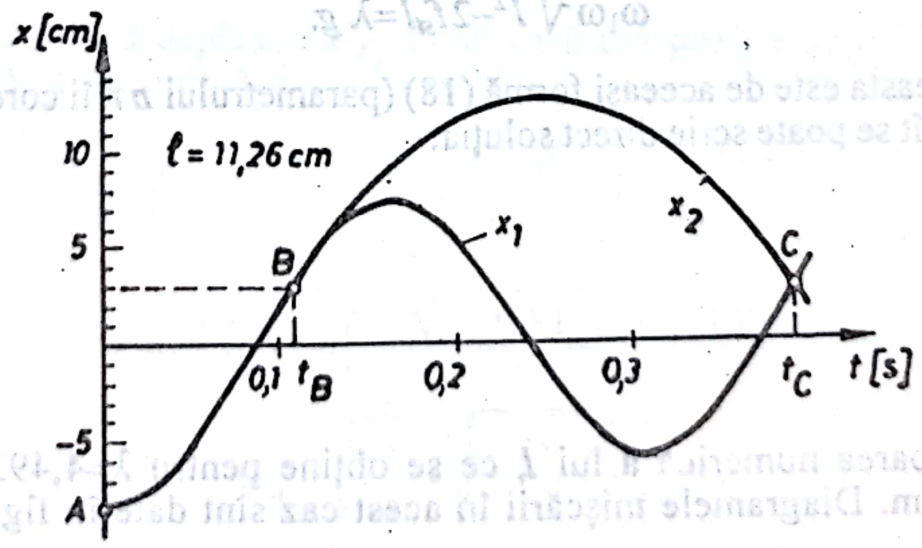


Fig. V.4.3

parametrii care au fost determinaţi şi la punctul precedent au următoarele valori:

$$t_B=0{,}107\ \text{s}; \qquad v_B=1{,}392\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_C=0{,}391\ \text{s}; \qquad x_C=0{,}03\ \text{m}$$

$$v_1=1{,}3915\ \frac{\text{m}}{\text{s}}; \qquad v_2=-1{,}3915\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Se vede că în acest caz vitezele corpurilor în momentul întîlnirii au mărimi egale şi sensuri opuse.

Alte valori pentru l se obţin egalînd Δt_2 cu valoarea lui Δt_1, dată de relaţia (17). Dacă se înlocuieşte $\Delta t_2 = \frac{2v_B}{g}$ în (17), rezultă

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_1 v_B}{g}=\frac{\omega_1 v_B}{g}.$$

S-a ajuns astfel la ecuaţia transcendentă

$$\operatorname{tg}\lambda=\lambda, \quad \lambda=\frac{\omega_1 v_B}{g}, \tag{20}$$

care are mai multe rădăcini reale. Acestea pot fi determinate prin diferite metode (grafic, prin încercări etc.). În anexă se dă programul pentru rezolvarea ecuaţiei cu ajutorul calculatorului electronic. Cea mai mică rădăcină pozitivă diferită de zero a ecuaţiei este $\lambda=4{,}4934$.

Pentru determinarea lui l se pleacă de la egalitatea $\frac{\omega_1 v_B}{g}=\lambda$, respectiv

$$\omega_1\omega\sqrt{l^2-2f_{st}l}=\lambda g. \tag{21}$$

Aceasta este de aceeaşi formă (18) (parametrului $n\pi$ îi corespunde λ), aşa încît se poate scrie direct soluţia:

(22)

Valoarea numerică a lui l, ce se obţine pentru $\lambda=4{,}4934$, este $l=0{,}1441$ m. Diagramele mişcării în acest caz sînt date în fig. V.4.4.

Scanned with OKEN Scanner

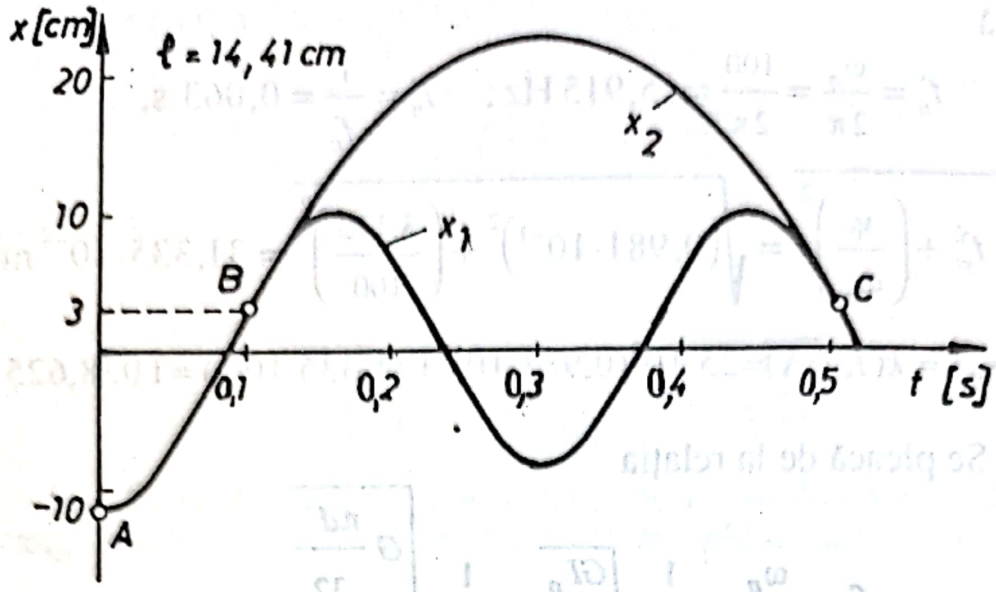


Fig. V.4.4

Corpurile se întîlnesc la momentul t_C=0,507 s, avînd aceeaşi viteză: $v_1=v_2=-1{,}987\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5.5.

1) Centrul de vibraţie este poziţia de echilibru static a corpului, în care deformaţia arcurilor este

$$f_{st}=\frac{mg}{4k}=\frac{10\cdot 9{,}81}{4\cdot 25\cdot 10^3}=0{,}981\cdot 10^{-3}\ \text{m}.$$

2) Dacă deplasarea y se măsoară din poziţia de echilibru static (fig. 5.5), legea mişcării rezultă sub forma

$$y=-f_{st}\cos\omega_n t+\frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t,$$

unde

$$v_0=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5}=3{,}132\ \text{m/s}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{4k}{m}}=\sqrt{\frac{4\cdot 25\cdot 10^3}{10}}=100\ \text{s}^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mai rezultă

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = 15{,}915 \text{ Hz}; \quad T_n = \frac{1}{f_n} = 0{,}063 \text{ s},$$

$$A = \sqrt{f_{st}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{\left(0{,}981 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{3{,}132}{100}\right)^2} = 31{,}335 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

3) $F_{max} = k(f_{st} + A) = 25 \cdot 10^3 (0{,}981 \cdot 10^{-3} + 31{,}335 \cdot 10^{-3}) = 1028{,}625$ N.

5.6. Se pleacă de la relaţia

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_p}{lJ}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G\dfrac{\pi d^4}{32}}{l\dfrac{MD^2}{8}}},$$

de unde

$$G = \frac{16\pi MD^2}{d^4} f_n^2 = 8{,}139 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

5.7. Perioada oscilaţiilor de răsucire fără masa suplimentară este

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{J}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}, \qquad (1)$$

unde k reprezintă constanta elastică la răsucire a firului.

Dacă se ataşează al doilea corp, constanta elastică nu se modifică, iar momentele de inerţie se însumează. Astfel

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_1}{k}}. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2), eliminînd constanta k, se obţine

$$J = \frac{T^2}{T_1^2 - T^2} J_1 = 1{,}36 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.8. Ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$\ddot{\varphi}+\frac{ka^2}{J}\varphi=0, \quad J=\frac{mr^2}{2}$$

de unde

$$\omega_n=\sqrt{\frac{ka^2}{J}}, \quad T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\frac{r}{a}\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

5.9. Ecuaţia diferenţială a mişcării se poate deduce din ecuaţia lui Lagrange sau folosind una din teoremele generale ale dinamicii:

$$\ddot{\varphi}+\frac{3g\left(m_1+m_2\right)}{l_1\left(2m_1+3m_2\right)}\varphi=0.$$

Pulsaţia şi perioada oscilaţiilor mici sînt

$$\omega_n=\sqrt{\frac{3g\left(m_1+m_2\right)}{l_1\left(2m_1+3m_2\right)}}=3{,}887\ \mathrm{s}^{-1}; \quad T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=1{,}616\ \mathrm{s}.$$

5.10*. Pentru determinarea pulsaţiei proprii se va folosi formula $\omega_n=\sqrt{\frac{k_e}{J_e}}$. Notăm cu φ unghiul de rotaţie al barei. Energia cinetică a sistemului este

$$E_c=\frac{J\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{m_2\left(l\dot{\varphi}\right)^2}{2}=\frac{m_1l^2}{3}\cdot\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2}{2}=l^2\left(\frac{m_1}{3}+m_2\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

De aici rezultă momentul de inerţie echivalent

$$J_e=l^2\left(\frac{m_1}{3}+m_2\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

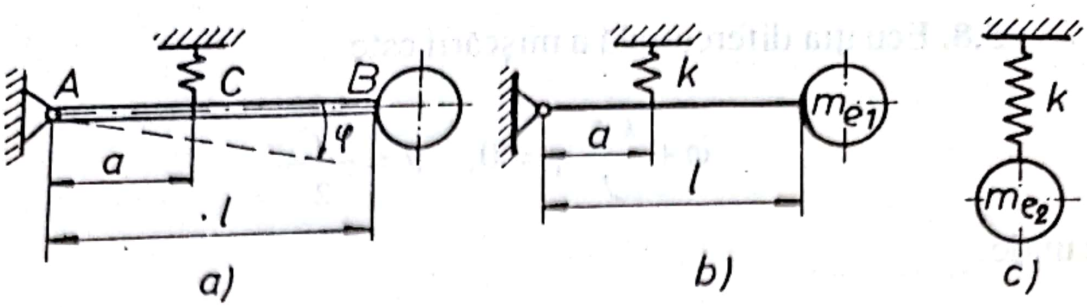


Fig. 5.10

Deformaţia arcului fiind a φ, energia potenţială a sistemului se scrie $E_p=\frac{ka^2\varphi^2}{2}$. Constanta elastică echivalentă este $k_e=ka^2$.

Pulsaţia proprie a sistemului rezultă

$$\omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{\frac{m_1}{3}+m_2}}.$$

Dacă pentru sistemul din fig.V.10, *b* alegem ca parametru tot unghiul φ de rotaţie al barei, constanta elastică echivalentă se obţine tot ka^2, iar energia cinetică $E_c=\frac{1}{2}m_{e_1}l^2\dot{\varphi}^2$. Din egalitatea energiilor cinetice rezultă

$$m_{e_1}=\frac{m_1}{3}+m_2.$$

Se vede de aici că pentru a avea aceleaşi oscilaţii, considerînd bara fără masă, trebuie să adăugăm masei m_2 o treime din masa barei.

Sistemul din fig. V.10, *c* are pulsaţia $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m_{e_2}}}$. Egalînd această valoare cu cea obţinută pentru sistemul din fig. V.10, a, se obţine

$$m_{e_2}=\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{m_1}{3}+m_2\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

5.2. VIBRAȚII LIBERE AMORTIZATE

5.11*. Vibrațiile se produc în jurul poziției de echilibru static. În fig. V.11.1 sînt indicate forțele ce acționează asupra corpului. Ecuația diferențială a mișcării este:

$$m\ddot{x} = mg - c\dot{x} - k(x + f_{st})$$

sau, deoarece $mg - kf_{st} = 0$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Soluția acestei ecuații în cazul amortizării slabe este de forma:

$$x = Ae^{-\lambda t}\cos(pt + \psi),$$

unde

$$\lambda = \frac{c}{2m}, \qquad p = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

Elongațiile maxime x_0, x_1, x_2 (fig. V.11.2) se repetă periodic cu perioada $T = \frac{2\pi}{p}$ (pseudoperioada mișcării). Raportul a două elongații maxime succesive este constant și egal cu $e^{\lambda T} = e^{\delta}$.

Avem:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = e^{\delta}.$$

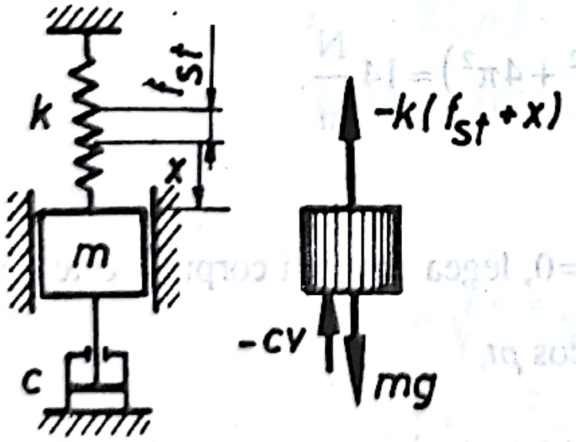


Fig. V.11.1

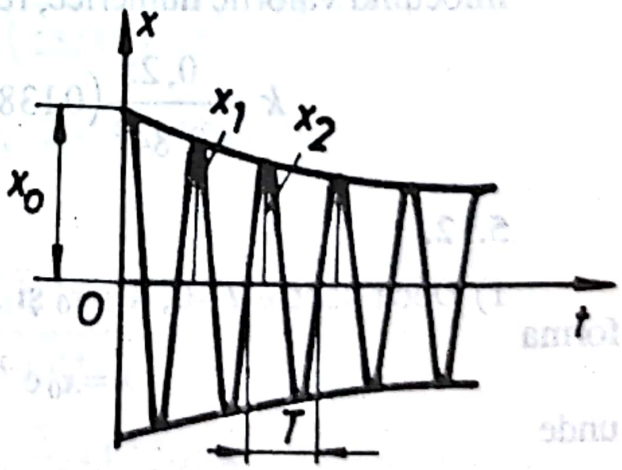


Fig. V.11.2

Înmulțind aceste n rapoarte între ele, se obține

$$\frac{x_0}{x_n} = e^{n\delta}, \qquad \text{de unde} \qquad \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}.$$

În cazul problemei de față $\frac{x_0}{x_n} = 4$ și astfel

$$\delta = \frac{1}{10} \ln 4 = 0{,}1386$$

Coeficientul de amortizare poate fi determinat din egalitatea $\delta = \lambda T = \frac{c}{2m} T$, unde în cazul de față $T = \frac{t}{n} = \frac{8{,}4}{10} = 0{,}84$ s. Rezultă

$$c = \frac{2m\delta}{T} = \frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1386}{0{,}84} = 0{,}0825 \text{ N/ms}^{-1}.$$

Pentru determinarea constantei elastice k se pleacă de la expresia pseudoperioadei

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}},$$

de unde

$$k = m\left[\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] = m\left[\left(\frac{\delta}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] = \frac{m}{T^2}\left(\delta^2 + 4\pi^2\right).$$

Înlocuind valorile numerice, rezultă

$$k = \frac{0{,}25}{0{,}84^2}\left(0{,}1386^2 + 4\pi^2\right) \approx 14 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

5.12.

1) Dacă pentru $t=0$, $x=x_0$ și $\dot{x}=0$, legea mișcării corpului este de forma

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \cos pt,$$

unde

$$p = 2\pi f = 2\pi\, 4 = 25{,}137 \text{ s}^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din condiția că pentru $t=10$ s, $x=\frac{1}{5}x_0$, rezultă $e^{10\lambda}=5$, de unde

$$\lambda=\frac{1}{10}\ln 5=0{,}1609\ \text{s}^{-1}.$$

Pentru pseudoperioada T_1 și decrementul logaritmic δ se obțin valorile

$$T_1=\frac{1}{f}=\frac{1}{4}=0{,}25\ \text{s};\qquad \delta=\lambda T_1=0{,}1609\cdot 0{,}25=0{,}0402.$$

2) Perioada vibrațiilor libere neamortizate este

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2\pi}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2}}=\frac{T_1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2}},$$

de unde

$$\frac{T_n}{T_1}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2}}\quad\text{și}\quad\frac{T_1-T_n}{T_1}=1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2}}.$$

Dezvoltînd în serie fracția $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2}}$ și păstrînd numai primii doi termeni (raportul $\frac{\lambda}{p}$ este mic), se obține

$$\frac{T_1-T_n}{T_1}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}1609}{25{,}137}\right)^2=2{,}048\cdot 10^{-5}.$$

5.13. $k=19{,}78\cdot 10^3$ N/m, $c=27{,}72$ N/ms^{-1}.

5.14.

1) $$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{J}}=\sqrt{\frac{10^{-6}\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-4}}}=0{,}5\ \text{s}^{-1}$$

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2\pi}{0{,}5}=12{,}566\ \text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Se pune condiția ca pseudopulsația vibrațiilor libere amortizate

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}} \qquad \left(\lambda = \frac{c}{2J}\right)$$

să fie egală cu qT_n și se obține

$$c = \frac{2J}{qT_n}\sqrt{q^2 T_n^2 \omega_n^2 - 4\pi^2} = \frac{4\pi J}{qT_n}\sqrt{q^2 - 1} = 1{,}666 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Nm^{-1}\,s}.$$

5.15.

1) În cazul vibrațiilor libere cu frecare constantă, perioada vibrațiilor libere este aceeași ca la vibrațiile neamortizate:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{6{,}27 \cdot 100}} = 0{,}502\ \mathrm{s}.$$

Deplasarea statică x_{st} a corpului C corespunzătoare forței de frecare μmg este

$$x_{st} = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0{,}032 \cdot 4 \cdot 9{,}81}{6{,}27 \cdot 100} = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Se știe că vibrațiile corpului se efectuează în jurul pozițiilor $x = \pm x_{st}$. Amplitudinea vibrației în primul semiciclu este $A_1 = x_0 - x_{st}$, iar amplitudinile în semiciclurile următoare formează o progresie aritmetică cu rația $-2x_{st}$. Deci, pentru al n-lea semiciclu amplitudinea este $A_n = x_0 - (2n-1)x_{st}$. Numărul de semicicluri pînă la oprire este cel mai mare număr întreg pentru care avem

$$x_0 - (2n-1)x_{st} \geq 0, \quad \text{adică} \quad n \leq \frac{x_0 + x_{st}}{2x_{st}}.$$

În cazul de față $\frac{x_0 + x_{st}}{2x_{st}} = \frac{15 + 2}{2 \cdot 2} = 4{,}25$ deci $n = 4$. Prin urmare, pînă la oprire corpul efectuează patru semicicluri, durata mișcării fiind $t = 2T = 2 \cdot 0{,}502 = 1{,}004$ s.

Pe baza traiectoriei de fază din fig. V.15 se poate urmări mișcarea pînă la oprire, care se produce în poziția $x = 1$ mm.

2) În acest caz forța de frecare este $\mu mg \cos\alpha$, iar deplasarea statică corespunzătoare

$$x_{st}^* = \frac{\mu mg\cos\alpha}{k} = \frac{0{,}032 \cdot 4 \cdot 9{,}81 \cos 35^\circ}{6{,}27 \cdot 100} = 1{,}64 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

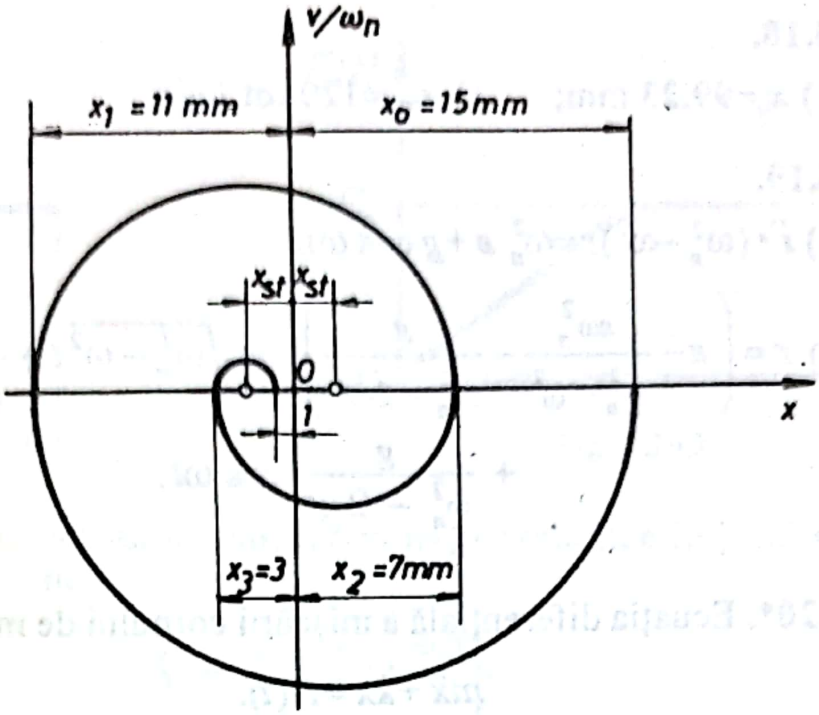


Fig. V.15

Rezultă:

$\frac{x_0 + x_{st}}{2x_{st}} = \frac{15 + 1,64}{2 \cdot 1,64} = 5,073$, deci $n^*=5$ şi $t^*=5\ \frac{T}{2}=5\ \frac{0,502}{2}=1,255$ s.

5.16.

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}} = 0,51\ s.$

2) $n=13$; durata mişcării fiind $n\frac{T}{2}=1,625$ s.

5.3. VIBRAŢII FORŢATE FĂRĂ AMORTIZARE

5.17.

1) $\omega_n=153,4\ s^{-1}$; $f_n=24,4$ Hz.

2) $x_0=0,074$ mm; 3) $n_{cr}=1464,86$ rot./min.

Scanned with OKEN Scanner

5.18.

1) x_0=99,23 mm; 2) n_{rez}=120 rot./min.

5.19.

1) $\ddot{r}+(\omega_n^2-\omega^2)r=\omega_n^2\, a+g\cos\omega t$.

2) $$r=\left(a-\frac{a\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2}-\frac{g}{\omega_n^2-2\omega^2}\right)\cos\sqrt{\omega_n^2-\omega^2}\,t+\frac{\omega_n^2 a}{\omega_n^2-\omega^2}+\cdot$$
$$+\frac{g}{\omega_n^2-2\omega^2}\cos\omega t.$$

5.20*. Ecuaţia diferenţială a mişcării corpului de masă m este

$$m\ddot{x}+kx=F(t).$$

Soluţia acestei ecuaţii se compune din soluţia generală a ecuaţiei omogene de forma $x_1=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t$ şi soluţia particulară x_f a ecuaţiei neomogene, care poate fi determinată cu metoda variaţiei constantelor de integrare. Rezultă

$$x=x_1+x_f=c_1\cos\omega_n t+c_2\sin\omega_n t+\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\theta)\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta.$$

Dacă pentru t=0, x=0 şi $\dot{x}$=0, ambele constante de integrare sînt nule şi soluţia, adică legea mişcării, devine

$$x=x_f=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\theta)\sin\omega_n(t-\theta)d\theta.$$

Folosind acest rezultat, în continuare se va studia mişcarea masei m în cele trei cazuri.

Cazul a (fig. V.20.1)

$$x=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^\tau F_0\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta=\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-\theta)\right]_0^\tau=$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-\tau)-\cos\omega_n t\right]=-2\frac{F_0}{k}\sin\frac{\omega_n\tau}{2}\sin\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

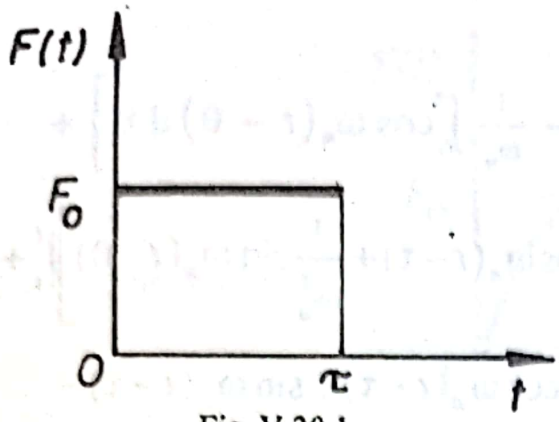


Fig. V.20.1

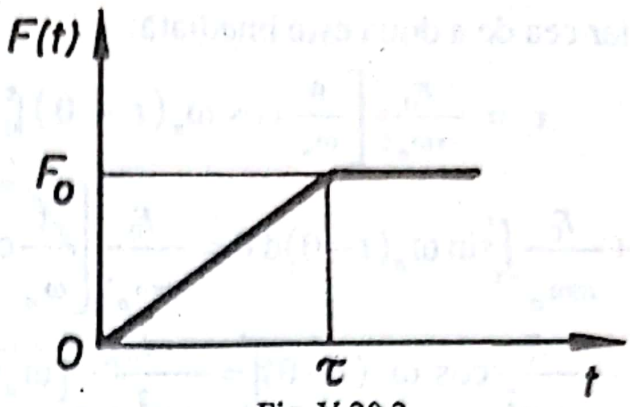


Fig. V.20.2

În acest caz corpul efectuează vibraţii armonice în jurul poziţiei iniţiale cu amplitudinea

$$A_1 = 2\frac{F_0}{k}\left|\sin\frac{\omega_n\tau}{2}\right|.$$

Amplitudinea este maximă şi egală cu $2\frac{F_0}{k}$ $\left(\sin\frac{\omega_n\tau}{2} = \pm 1\right)$ dacă

$$\frac{\omega_n\tau}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad \tau = (2k+1)\frac{\pi}{\omega_n} = (2k+1)\frac{T}{2},$$

adică dacă intervalul τ este un multiplu impar al semiperioadei vibraţiilor libere.

Cazul b (fig. V.20.2)

$$x = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\theta)\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^\tau F_0\frac{\theta}{\tau}\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{m\omega_n}\int_\tau^t F_0\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta = \frac{F_0}{m\omega_n\tau}\int_0^\tau \theta\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta +$$

$$+\frac{F_0}{m\omega_n}\int_\tau^t \sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta$$

Integrala întîia se poate calcula prin părţi luînd

$$u=\theta \qquad du=d\theta$$

$$dv=\sin\omega_n(t-\theta)\,d\theta, \qquad v=\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\theta),$$

Scanned with OKEN Scanner

iar cea de a doua este imediată:

$$x = \frac{F_0}{m\omega_n\tau}\left[\frac{\theta}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\theta)\Big|_0^\tau - \frac{1}{\omega_n}\int_0^\tau \cos\omega_n(t-\theta)\,d\theta\right] +$$

$$+\frac{F_0}{m\omega_n}\int_\tau^t \sin\omega_n(t-\theta)d\theta = \frac{F_0}{m\omega_n\tau}\left[\frac{\tau}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)+\frac{1}{\omega_n^2}\sin\omega_n(t-\theta)\right]\Big|_\tau^t +$$

$$+\frac{F_0}{m\omega_n^2}\cos\omega_n(t-\theta)\Big|_\tau^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2\omega_n\tau}\left[\omega_n\tau\cos\omega_n(t-\tau)+\sin\omega_n(t-\tau)-\right.$$

$$\left.-\sin\omega_n t\right] + \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos\omega_n(t-\tau)\right] = \frac{F_0}{k\omega_n\tau}\left[\sin\omega_n(t-\tau)-\right.$$

$$\left.-\sin\omega_n t\right)\Big] + \frac{F_0}{k}.$$

Rezultatul mai poate fi pus sub forma

$$x = \frac{F_0}{k}\left[1-\frac{2}{\omega_n\tau}\sin\frac{\omega_n\tau}{2}\cos\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right],$$

de unde se vede că în acest caz centrul de vibraţie este deplasat faţă de origine cu $\frac{F_0}{k}$, iar amplitudinea oscilaţiilor este

$$A_2 = \frac{F_0}{k}\frac{2}{\omega_n\tau}\left|\sin\frac{\omega_n\tau}{2}\right|.$$

Amplitudinea este maximă dacă $\tau \to 0$ şi $A_{2\max} = \frac{F_0}{k}$.

Cazul c (fig. V.20.3)

Procedînd în mod analog, în acest caz rezultă

$$x = \frac{F_0}{k}\frac{(T/\tau)\cos\frac{\pi\tau}{T}}{T^2/4\pi^2 - 1}\sin\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right),$$

adică o mişcare vibratorie armonică cu centrul de oscilaţie în origine şi cu amplitudinea

$$A_3 = \frac{F_0}{k}\frac{T/\tau\left|\cos\frac{\pi\tau}{T}\right|}{\left|T^2/4\tau^2 - 1\right|} \qquad (15)$$

Scanned with OKEN Scanner

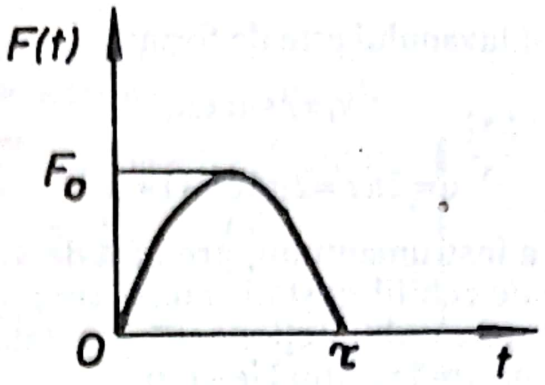


Fig. V.20.3

Amplitudinea este maximă dacă $T/\tau \to 2$ $\left(\tau \to \frac{T}{2}\right)$ şi

$$A_{3\,max} = lim_{T/\tau \to 2} \frac{F_0}{k} \frac{T/\tau \left|\cos \frac{\pi\tau}{T}\right|}{\left|T^2/4\tau^2 - 1\right|} = \frac{\pi}{2} \frac{F_0}{k}. \qquad (16)$$

Este interesant să se compare efectul impulsului dreptunghiular cu cel al impulsului semisinusoidal.

În ambele cazuri amplitudinea vibraţiilor este maximă dacă durata impulsului este egală cu semiperioada oscilaţiilor libere (în primul caz poate să fie şi un multiplu impar al acesteia), însă amplitudinea maximă produsă de impulsul dreptunghiular este mai mare de $\frac{4}{\pi} = 1{,}273$ ori.

5.21.*

1) Săgeata statică a arcului sub acţiunea greutăţii instrumentului (cînd tavanul nu vibrează) este $f_{st} = G/k$.

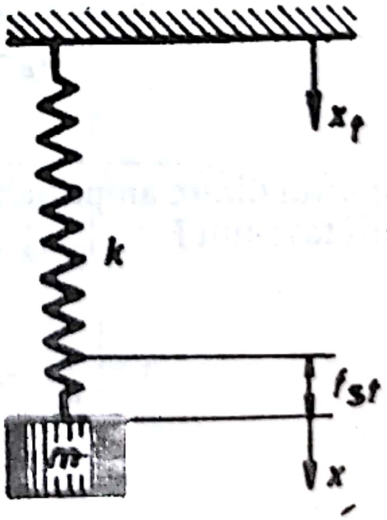


Fig. V.21.1

Legea mişcării tavanului este de forma

$$x_t = r \sin \omega t, \tag{1}$$

unde

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 314 \text{ s}^{-1}.$$

Deplasarea x a instrumentului, produsă de vibraţia tavanului, este măsurată din poziţia de echilibru static cu sensul pozitiv în jos. În timpul mişcării asupra instrumentului acţionează greutatea G şi forţa elastică $F_e = -k(f_{st} + x - x_t)$. Conform legii lui Newton

$$m\ddot{x} = G - k(f_{st} + x - x_t), \qquad m = \frac{G}{g} \tag{2}$$

sau ţinînd seama de relaţia (1) şi de egalitatea $G = kf_{st}$

$$m\ddot{x} + kx = kr \sin \omega t. \tag{3}$$

Împărţind cu m, ecuaţia diferenţială (3) poate fi scrisă sub forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 r \sin \omega t; \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{G} g}. \tag{4}$$

Se poate constata că, din cauza mişcării periodice a tavanului, instrumentul efectuează vibraţii forţate. Legea mişcării instrumentului, soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (4) este de forma

$$x = x_0 \sin \omega t. \tag{5}$$

Valoarea constantei x_0 se determină din condiţia ca această soluţie să verifice ecuaţia diferenţială (4), rezultînd:

$$x_0 = \frac{\omega_n^2 r}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} r. \tag{6}$$

Raportul dintre amplitudinea vibraţiilor forţate $|x_0|$ şi amplitudinea r a mişcării tavanului

$$\frac{|x_0|}{r} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|}, \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă aşa-numitul *coeficient de transmisibilitate*. Valoarea acestui coeficient este funcţie de raportul $\frac{\omega}{\omega_n}$ şi poate fi subunitar (fig. V.21.2) numai dacă $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$.

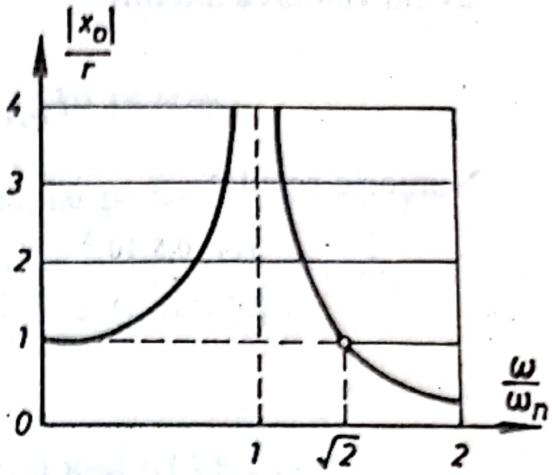


Fig. V.21.2

Prin urmare, pentru a împiedica transmiterea vibraţiilor de la tavan către instrument, trebuie să se folosească arcuri moi (cu constantă elastică mică). Dacă această condiţie este verificată, relaţia (7) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{|x_0|}{r} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \qquad (7')$$

şi trebuie să avem

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1},$$

de unde

$$\omega_n^2 = \frac{\omega^2}{n+1}, \quad \text{iar} \quad k = m\frac{\omega^2}{n+1}. \qquad (8)$$

Cu datele numerice ale problemei rezultă

$$k = \frac{40}{9{,}81} \cdot \frac{314^2}{20+1} = 19\,143 \text{ N/m}.$$

2) Acceleraţia instrumentului este

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x_0 \sin \omega t = \frac{\omega^2 r}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \sin \omega t,$$

avînd amplitudinea

$$a_{max} = \frac{\omega^2 r}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} = \frac{\omega^2 r}{n}. \qquad (9)$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţa transmisă instrumentului datorită mişcării tavanului este ma, avînd valoarea maximă

$$F_{max} = ma_{max} = \frac{m\omega^2 r}{n}. \qquad (10)$$

Numeric rezultă

$$a_{max} = \frac{314^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{20} = 2{,}465 \text{ m/s}^2; \quad F_{max} = \frac{40}{9{,}81} \cdot 2{,}465 = 10{,}05 \text{ N}.$$

5.4. VIBRAŢII FORŢATE CU AMORTIZARE

5.22*.

1) Dacă deplasarea x a corpului de masă m se măsoară din poziţia de echilibru static, ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t.$$

Vibraţia forţată este de forma $x_f = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$, unde

$$x_0 = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{c}{c_{cr}} \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad x_{st} = \frac{F_0}{k}. \qquad (1)$$

Dacă $\frac{c}{c_{cr}} << 1$, se poate admite că rezonanţa se produce la $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ ($\omega_r = \omega_n$) şi amplitudinea de rezonanţă este

$$x_{or} \approx \frac{x_{st}}{2\frac{c}{c_{cr}}}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din egalitatea $\omega_r = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, rezultă

$$k = m\omega_r^2 = m(2\pi f_r)^2 = 2(2\pi 4{,}8)^2 = 1819{,}16 \text{ N/m}.$$

Astfel $x_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{3{,}2}{1819{,}16} = 1{,}759 \cdot 10^{-3}$ m, iar pe baza relaţiei (2)

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_{st}}{x_{or}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}759 \cdot 10^{-3}}{2{,}3 \cdot 10^{-2}} = 0{,}03824 \cdot$$

Cum $c_{cr} = 2m\omega_n$, rezultă

$$c = 0{,}03824\ c_{cr} = 0{,}03824 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot 4{,}8 = 4{,}613 \text{ Ns/m}.$$

2) Dacă frecvenţa de excitaţie f este de 4 Hz, raportul $\frac{\omega}{\omega_n}$ ia valoarea

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi f}{2\pi f_n} = \frac{f}{f_r} = \frac{4}{4{,}8} = 0{,}8333$$

Amplitudinea vibraţiilor forţate se calculează cu relaţia (1):

$$x_0 = \frac{1{,}759 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{\left(1 - 0{,}8333^2\right)^2 + \left(2 \cdot 0{,}03824 \cdot 0{,}8333\right)^2}} = 5{,}634\ 10^{-3} \text{ m}$$

Dacă amortizorul se îndepărtează $\left(\frac{c}{c_{cr}} = 0\right)$, amplitudinea x_0 devine

$$x_0 = \frac{x_{st}}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|} = \frac{1{,}759 \cdot 10^{-3}}{\left|1 - 0{,}8333^2\right|} = 5{,}755 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

5.23. Dacă $\frac{c}{c_{cr}} << 1$, se poate admite că pulsaţia de rezonanţă $\omega_r \approx \omega_n$ şi se pot scrie relaţiile

$$X_{or} = \frac{x_{st}}{2\frac{c}{c_{cr}}}; \quad X_0 = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{c}{c_{cr}} \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd de aici x_{st}, rezultă o ecuație în care singura necunoscută este raportul $\frac{c}{c_{cr}}$. Se obține în final

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{1}{2}\frac{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_{or}}{x_0}\right)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{2}\frac{\left|1-0{,}8^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{14}{8{,}2}\right)^2-0{,}8^2}} = 0{,}1193.$$

5.24.

1) $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kr\sin\omega t.$

2) $x_f=x_0\sin(\omega t-\varphi),$

unde

$$x_0=\frac{r}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Rezultate numerice

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{8400}{20}}=20{,}494\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{12}{20{,}494}=0{,}5855$$

$$\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{65}{2\cdot 20\cdot 20{,}494}=0{,}0793$$

$$x_0=\frac{1{,}5}{\sqrt{\left(1-0{,}5855^2\right)^2+\left(2\cdot 0{,}0793\cdot 0{,}5855\right)^2}}=2{,}26\ \mathrm{cm}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\cdot 0{,}0793\cdot 0{,}5855}{1-(0{,}5855)^2}=0{,}1413;\quad \varphi=0{,}140\ \mathrm{rad}\ (8{,}04^\circ)$$

3) $F_{max}=k\sqrt{x_0^2+r^2-2x_0r\cos\varphi}=67{,}42\ \mathrm{N}.$

Scanned with OKEN Scanner

5.25. Deplasarea culisei fiind $x_1=r\sin\omega t$, ecuaţia diferenţială a mişcării masei m este

$$m\ddot{x}=-kx-c(\dot{x}-\dot{x}_1)$$

sau

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=cr\omega\cos\omega t.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale este

$$x=e^{-\frac{c}{2m}t}\left(C_1\cos pt+C_2\sin pt\right)+\frac{cr\omega}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}\cos\left(\omega t-\varphi\right),$$

unde

$$p=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2};\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{m\omega^2-k}{c\omega},$$

iar C_1 şi C_2 sînt constante de integrare, ce se determină din condiţiile iniţiale ($t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$).

După un timp suficient de mare primul termen se amortizează, după care mişcarea devine armonică cu amplitudinea

$$x_0=\frac{cr\omega}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}=r\frac{2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}.$$

Dacă se reprezintă grafic x_0/r în funcţie de $\frac{\omega}{\omega_n}$ pentru diferite valori ale raportului de amortizare $\frac{c}{c_{cr}}$, se obţin curbele din fig. V.25.

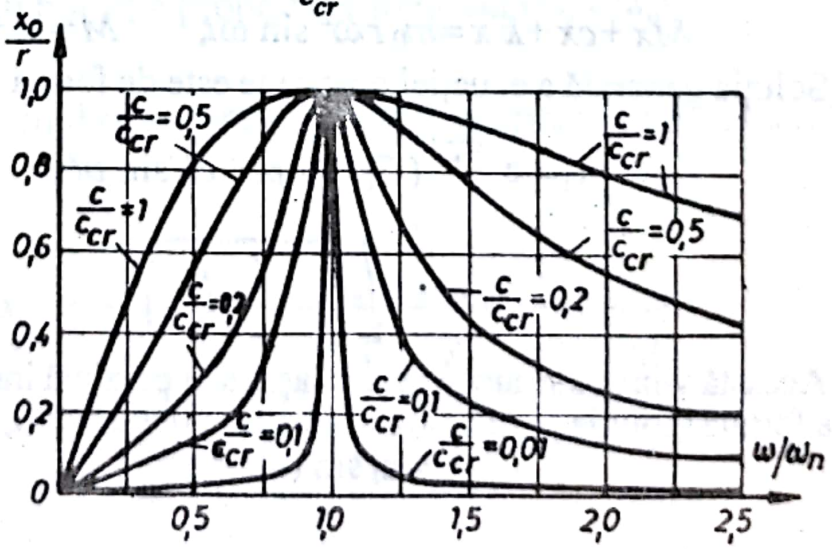


Fig. V.25

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că pentru valori mici ale lui ω amplitudinea x_0 este foarte mică (forța nu se transmite prin amortizor) și pentru ω foarte mare x_0 tinde către zero (masa m nu poate urmări mișcarea cu frecvență mare a cilindrului). Este interesant de observat că, indiferent de valoarea amortizării ($c \neq 0$), amplitudinea este maximă pentru $\omega=\omega_n$ și $x_{0max}=r$.

Rezultatele numerice: $\omega_n=21{,}21\ s^{-1}$; $x_0=2{,}185\cdot10^{-2}$ m.

5.26*. Unghiul de rotație al excentricelor la momentul t este $\varphi_1=\varphi_2=\omega t$ (fig. V.26).

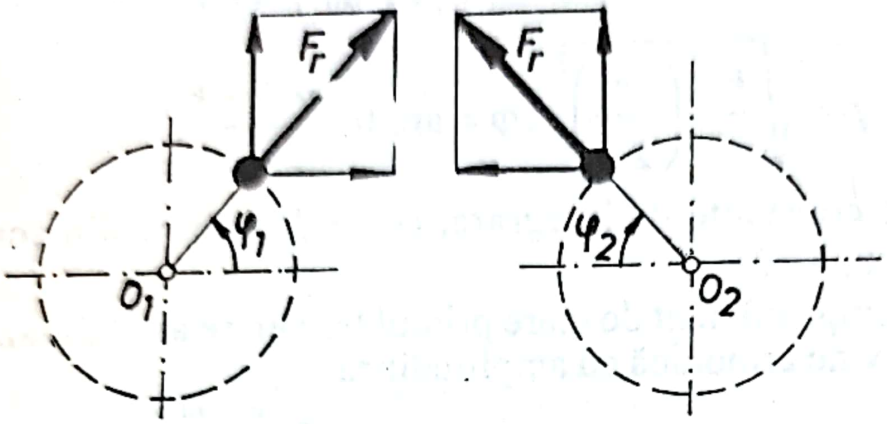


Fig. V.26

Datorită rotației excentricelor apar forțele centrifuge, valoarea uneia fiind $F_r=\frac{m_0}{2}\omega^2 r$. Componentele orizontale ale acestor forțe se anulează, iar componentele verticale se însumează, dînd naștere la o forță perturbatoare $F=m_0\omega^2 r \sin \omega t$.

Dacă se alege ca parametru pentru studiul mișcării deplasarea x a carcasei față de poziția de echilibru static, ecuația diferențială a mișcării este

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=m_0 r\omega^2 \sin \omega t, \qquad M=m+m_0.$$

Soluția generală a ecuației omogene este de forma

$$x_1=e^{-\frac{c}{2M}t}(C_1 \cos pt+C_2 \sin pt),$$

unde

$$p=\sqrt{\frac{k}{M}-\left(\frac{c}{2M}\right)^2}$$

Această vibrație se amortizează, așa încît prezintă interes în primul rînd vibrația forțată (soluția particulară a ecuației diferențiale), care are forma

$$x_f=x_0 \sin(\omega t-\varphi).$$

Scanned with OKEN Scanner

Amplitudinea x_0 a acestor vibraţii se calculează cu formula

$$x_0 = \frac{m_0 r\omega^2}{\sqrt{\left(k - M\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}}$$

iar pulsaţia de rezonanţă este

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}}\,\omega_n, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}\,.$$

Aplicaţia numerică:

$$x_0 = \frac{0,5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 31,4^2}{\sqrt{\left(54000 - 50 \cdot 31,4^2\right)^2 + (160 \cdot 31,4)^2}} = 0,179 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{54000}{50}} = 32,863\ \text{s}^{-1}$$

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2M\omega_n} = \frac{160}{2 \cdot 50 \cdot 32,863} = 0,0487$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(0,0487)^2}}\,32,863 = 32,941\ \text{s}^{-1}$$

Amortizarea fiind slabă $\left(\frac{c}{c_{cr}} = 0,0487\right)$, pulsaţia de rezonanţă practic coincide cu pulsaţia proprie a sistemului ($\omega_r \approx \omega_n$).

5.27. Amplitudinea vibraţiilor forţate se poate calcula cu relaţia

$$x_0 = \frac{r\,\frac{m_0}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\,\frac{c}{c_{cr}}\,\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Admiţînd că amortizarea este slabă, rezonanţa se produce pentru $\omega \approx \omega_n \left(\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1\right)$ şi astfel

$$x_{or} = \frac{r\frac{m_0}{m}}{2\frac{c}{c_{cr}}} \tag{1}$$

Se mai poate scrie relaţia

$$x_{0_l} = \lim_{\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty} x_0 = r\frac{m_0}{m}. \tag{2}$$

Rezultă pe baza relaţiilor (1) şi (2)

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{x_{0l}}{2x_{0r}} = \frac{0,85}{2 \cdot 7,6} = 0,0559.$$

5.28.

$$k = 1,442 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{m}; \quad c = 400 \text{ Ns/m}.$$

5.29.

1) $\omega_n = 120 \text{ s}^{-1}$; 2) $x_0 = 0,108$ cm;

3) $\varphi = 2,7468$ rad; 3) $F_{tr} = 5\ 104$ N.

5.30.

1) $(M+4m)\ddot{y}+c\dot{y}+ky=4mr\omega^2 \sin \omega t$.

2) $x_0 = 2,51$ mm.

5.31*. Dacă raportul $\frac{r}{l}$ este foarte mic, se poate admite că punctul B, respectiv pistonul se mişcă la fel ca proiecţia A_1 a punctului A pe verticală (fig. 5.31). Astfel, legea mişcării pistonului este

$$x_B \approx OA_1 = r \sin \omega t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţa perturbatoare, ce acţionează asupra compresorului, este egală cu forţa de inerţie a masei neechilibrate în mişcarea de translaţie, adică:

$$F(t)=-m_p\ddot{x}_B=m_p r\omega^2 \sin \omega t,$$

unde

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60} = 157 \text{ s}^{-1}.$$

Amplitudinea forţei perturbatoare este

$$F_0=m_p r \omega^2=12\cdot 10\cdot 10^{-2}\cdot 157^2=29\,578{,}8 \text{ N}.$$

Pentru ca forţa maximă transmisă fundaţiei să nu depăşească 20% din această valoare, transmisibilitatea; (formula (84) din anexe)

$$T = \frac{\sqrt{1+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

trebuie să fie cel mult egală cu 0,2 adică

$$\frac{\sqrt{1+\left(2\cdot 0{,}15\cdot\frac{157}{\omega_n}\right)^2}}{\left[1-\left(\frac{157}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\cdot 0{,}15\cdot\frac{157}{\omega_n}\right)^2} \le 0{,}2.$$

Considerînd semnul egal şi rezolvînd ecuaţia obţinută, rezultă $\omega_n=57{,}72 \text{ s}^{-1}$, iar $k=m\omega_n^2=(5\,000/9{,}81)\,57{,}72^2=1698062$ N/m. Pentru a fi verificată inegalitatea de mai sus, va trebui să avem $\omega_n \le 57{,}72 \text{ s}^{-1}$ sau $k \le 1\,698\,062$ N/m. În aceste condiţii, amplitudinea forţei transmise fundaţiei va fi

$$F_{T0} \le 0{,}2\, F_0 = 5915{,}76 \text{ N}.$$

Valoarea limită a coeficientului de amortizare este

$$c=0{,}15\, c_{cr}=0{,}15\cdot 2\, m\omega_n=8\,825{,}7 \text{ N m}^{-1} \text{ s}.$$

Izolarea vibraţiilor este corespunzătoare ($T \le 0{,}2$) dacă $c \le 8\,825{,}7$ Nm^{-1} s.

Scanned with OKEN Scanner

5.32.

1) Ecuaţia diferenţială a mişcării relative a masei seismice este

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=mr\omega^2 \sin \omega t$$

unde

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 125,66 \ s^{-1}.$$

Soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (vibraţia forţată a masei seismice) este de forma $y=y_0 \sin(\omega t-\varphi)$, unde

$$\frac{y_0}{r} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Cu datele numerice din enunţ rezultă

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{0,25}} = 63,24 \ s^{-1}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{125,66}{63,24} = 1,99$$

$$c_{cr}=2m\omega_n=2\cdot 0,25\cdot 63,24=31,62 \ \text{Ns/m}$$

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{22,36}{31,62} = 0,707$$

$$\frac{y_0}{r} = 0,9696; \qquad r = 7,22 \ \text{mm}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi=-0,95059 \Rightarrow \varphi=-0,760 \ \text{rad} \ (-43,55°)$$

2)

$$x_0 = r\frac{\sqrt{1+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 5,28 \ \text{mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Se pune condiția $\frac{y_0}{r}=0{,}95$ și se obține ecuația

$$\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4}}=0,95,$$

având soluția $\frac{\omega}{\omega_n}=1{,}744$ ($\omega=1{,}744\,\omega_n$).

Astfel frecvența minimă căutată este

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1,744\cdot 63,24}{2\pi}=17,55\ \text{Hz}.$$

La această frecvență

$$tg\ \varphi=\frac{2\cdot 0,707\cdot 1,744}{1-(1,744)^2}=-1,2079,$$

deci eroarea de fază este $\varphi=-0{,}8793$ rad ($-50{,}38°$).

5.33*.

1) Se notează cu θ unghiul pe care îl formează manivela OA cu verticala Oy la momentul t și cu B_0 poziția lui B pentru $\theta=0$. Dacă pentru $t=0$, $\theta=\varphi$, atunci

$$\theta=\omega t+\varphi. \tag{1}$$

iar deplasarea capătului B al arcului la momentul t este

$$x_1=B_0B=OA'=r\sin\theta=r\sin(\omega t+\varphi). \tag{2}$$

Se notează cu C_0 poziția capătului C al arcului dacă B este în B_0 și arcul este nedeformat. Din C_0 se va măsura deplasarea x a cursorului cu sensul pozitiv spre dreapta (fig. V.33.1).

Forțele care acționează asupra cursorului în direcția mișcării la momentul t sînt: forța elastică

$$F_e=-k(x-x_1) \tag{3}$$

și forța de frecare la alunecare

$$F_f=-\mu mg\,\text{sign}\,\dot{x}. \tag{x}$$

Scanned with OKEN Scanner

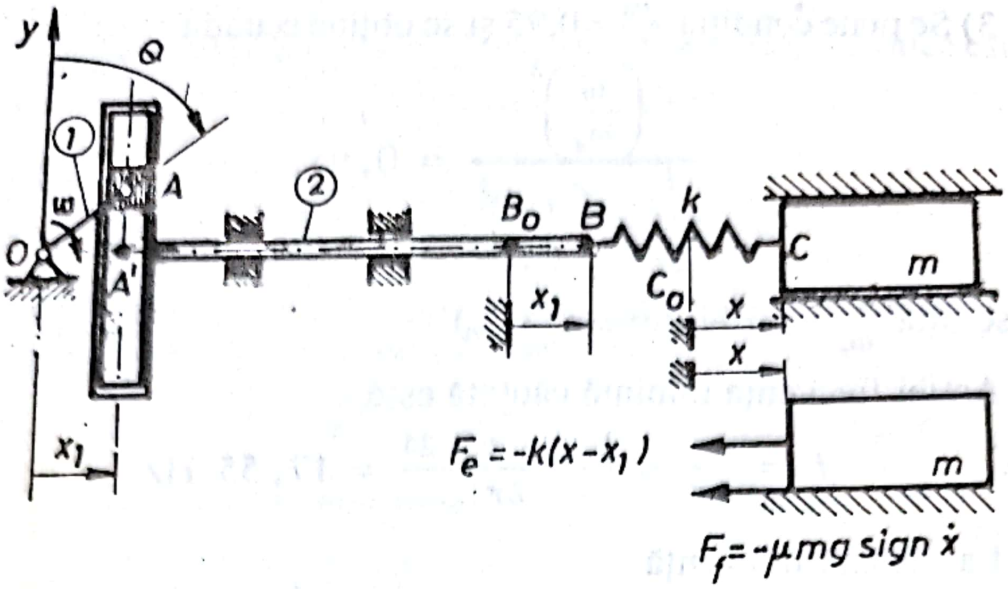


Fig. V.33.1

Astfel ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$m\ddot{x}=-k(x-x_1)-\mu mg\,\text{sign}\,\dot{x},$$

care, ţinînd seama de relaţia (2), poate fi scrisă sub forma

$$m\ddot{x}+kx=-\mu mg\,\text{sign}\,\dot{x}+kr\sin(\omega t+\varphi) \tag{5}$$

Dacă mişcarea cursorului este continuă, viteza lui se anulează doar în poziţiile sale extreme, în care se schimbă sensul mişcării. Se presupune că în momentul iniţial x are valoarea maximă A, deci

$$\text{pentru } t=0, \qquad x=A, \qquad \dot{x}=0. \tag{6}$$

După o semiperioadă a mişcării cursorul ajunge în poziţia extremă opusă, avînd din nou viteza nulă, deci

$$\text{pentru } t=\frac{\pi}{\omega}, \qquad x=-A, \qquad \dot{x}=0 \tag{7}$$

În intervalul de timp $\left[\frac{\pi}{\omega},\frac{2\pi}{\omega}\right]$, mişcarea se repetă în sens invers. De aceea este suficient să se studieze mişcarea în intervalul $[0,\frac{\pi}{\omega}]$.

În acest interval mişcarea făcîndu-se în sens negativ, $\text{sign}\,\dot{x}=-1$, iar ecuaţia diferenţială (5) a mişcării devine

$$m\ddot{x}+kx=\mu mg+kr\sin(\omega t+\varphi). \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestei ecuații diferențiale liniare și neomogene se compune din soluția generală a ecuației omogene

$$x_g = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

și soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$x_p = a + x_0 \sin (\omega t + \varphi).$$

Punînd condiția ca soluția particulară să verifice ecuația diferențială (8), rezultă

$$a = \frac{\mu m g}{k}, \qquad x_0 = \frac{kr}{k - m\omega^2} = \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Astfel, legea mișcării cursorului în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$ este

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + a + \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin (\omega t + \varphi), \tag{9}$$

iar legea vitezei

$$v = \dot{x} = -C_1 \omega_n \sin \omega_n t + C_2 \omega_n \cos \omega_n t + \frac{r\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos (\omega t + \varphi). \tag{10}$$

În aceste două legi apar trei constante deocamdată necunoscute: C_1, C_2 și φ.

Introducînd în relațiile (9) și (10) condițiile (6) și apoi (7), se obține următorul sistem de ecuații

$$C_1 + a + \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \varphi = A \tag{11}$$

$$C_2 \omega_n + \frac{r\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \varphi = 0 \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$C_1 \cos \pi \frac{\omega_n}{\omega} + C_2 \sin \pi \frac{\omega_n}{\omega} + a - \frac{r}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \varphi = -A \qquad (13)$$

$$-C_1 \omega_n \sin \pi \frac{\omega_n}{\omega} + C_2 \omega_n \cos \pi \frac{\omega_n}{\omega} - \frac{r\omega}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \varphi = 0 \qquad (14)$$

cu necunoscutele C_1, C_2 şi A.

Însumînd ecuaţia (11) cu (13) şi (12) cu (14), se obţine un sistem de două ecuaţii cu necunoscutele C_1 şi C_2:

$$C_1\left(1 + \cos \pi \frac{\omega_n}{\omega}\right) + C_2 \sin \pi \frac{\omega_n}{\omega} + 2a = 0$$

$$-C_1 \sin \pi \frac{\omega_n}{\omega} + C_2\left(1 + \cos \pi \frac{\omega_n}{\omega}\right) = 0,$$

din care rezultă

$$C_1 = -a \quad \text{şi} \quad C_{2=} - a \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_n}{2\omega}.$$

Înlocuind valorile acestor constante în ecuaţiile (11) şi (12), se obţine următorul sistem

$$\frac{r}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \varphi = A \qquad (15)$$

$$\frac{r\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \varphi = a \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_n}{2\omega}, \qquad (16)$$

din care se determină necunoscutele φ şi A:

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \cdot \frac{\omega_n}{\omega}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_n}{2\omega}\right] \qquad (17)$$

$$A = r \frac{\sqrt{1 - \left\{\frac{a}{r} \cdot \frac{\omega_n}{\omega}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_n}{2\omega}\right\}^2}}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|}. \qquad (18)$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a văzut că unghiul φ determină poziția manivelei 1 în momentul $t=0$, cînd deplasarea x are valoarea maximă A. În același timp φ reprezintă defazajul unghiular dintre mișcările cursorului și a punctului B.

Dacă frecarea este neglijabilă ($\mu=0 \Rightarrow a=0$), relația (18) devine

$$A = x_0 \frac{r}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|}, \tag{19}$$

adică se regăsește amplitudinea vibrațiilor forțate fără amortizare în cazul excitației cinematice.

Menționăm că toate rezultatele obținute sînt valabile numai dacă viteza cursorului nu se anulează în intervalul $(0, \frac{\pi}{\omega})$.

În plus, pentru existența mișcărilor periodice studiate trebuie să fie îndeplinite anumite condiții.

Astfel, este necesar să rezulte pentru cos φ [relația (17)] valori cuprinse între -1 și $+1$, adică trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\frac{a}{r} \leq \frac{1}{\frac{\omega_n}{\omega}\left|\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_n}{2\omega}\right|}. \tag{20}$$

Ca să aibă sens radicalul din relația (8), trebuie să fie îndeplinită tot condiția (20).

S-a presupus că în momentul inițial viteza cursorului este nulă. Ca să pornească din această poziție spre stînga este necesar ca forța rezultantă, respectiv accelerația pentru $t=0$ să fie negativă. Din ecuația diferențială (8) se obține pentru $t=0$

$$m\ddot{x} = -kA + \mu mg + kr \sin \varphi.$$

Prin urmare trebuie să fie verificată condiția

$$-kA + \mu mg + kr \sin \varphi < 0.$$

Ținînd seamă de relațiile (15) și (18) condiția de mai înainte poate fi pusă sub forma

$$\frac{a}{r} < \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\omega_n}{2\omega}}}. \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

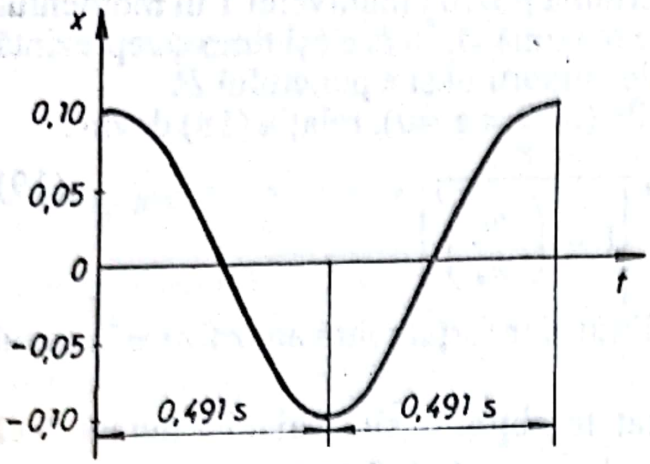


Fig. 5.33.2

În încheiere menționăm că sînt posibile mișcări intermitente cu una sau mai multe opriri într-o semiperioadă, studiul acestora fiind mult mai complicat.

2. Cu datele numerice ale problemei rezultă

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{96}{1,5}} = 8 \text{ s}^{-1}.$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{6,4}{8}; \quad \frac{\omega_n}{\omega} = 1,25$$

$$a = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0,2 \cdot 1,5 \cdot 9,81}{96} = 0,0306 \text{ m}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{0,0306}{0,5} = 0,612$$

$$A = 0,05 \frac{\sqrt{1 - \left[0,612 \cdot 1,25\left(1 - 0,8^2\right) \text{tg } 1,963\right]^2}}{\left|1 - 0,8^2\right|} = 0,1037 \text{ m}.$$

Expresia din partea dreaptă a inegalității (21) pentru $\frac{\omega}{\omega_n} = 0,8$ are valoarea 0,817, așa încît condiția aceasta este satisfăcută ($\frac{a}{r} = 0,612 < 0,817$)

$$\cos \varphi = 0,612 \cdot 1,25 \, (1 - 0,8^2) \text{tg } 1,963 = -0,6648$$

$$(15) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{A}{r}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] = \frac{0,1037}{0,05}\left(1 - 0,8^2\right) = 0,7469.$$

Deoarece $\sin \varphi > 0$ și $\cos \varphi < 0$, unghiul φ se află în cadranul al doilea și

$$\varphi = 2,2981 \text{ rad } (131,67°).$$

În fig. 5.33.2 este reprezentată diagrama acestei mișcări în timp ce t variază între 0 și $\frac{2\pi}{\omega_\pi}$ (0 perioadă). Din diagramă se vede că viteza nu se anulează între 0 și $\frac{\pi}{\omega}$.

ANEXE

Scanned with OKEN Scanner

A. NOȚIUNI TEORETICE. FORMULE DE BAZĂ

Dinamica punctului material

Multe probleme de dinamica punctului material se pot rezolva aplicînd *legea lui Newton*

$$m\vec{a}=\vec{F} \tag{1}$$

în care $\vec{F}=\Sigma\vec{F}_i$ reprezintă rezultanta tuturor forțelor direct aplicate și de legătură care acționează asupra punctului.

Proiectînd ecuația vectorială (1) pe axele unui sistem de referință, ales în mod convenabil, se obține în general un sistem de trei ecuații diferențiale scalare. Dacă mișcarea se studiază în raport cu un sistem de referință cartezian triortogonal, ecuațiile diferențiale scalare sînt

$$m\ddot{x}=X, \qquad m\ddot{y}=Y, \qquad m\ddot{z}=Z \tag{2}$$

Proiectînd ecuația vectorială (1) pe axele intrinseci, rezultă

$$ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = F_\tau\ , \quad ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = F_n\ , \quad ma_b = 0 = F_b. \tag{3}$$

În ecuațiile (2), X, Y, Z reprezintă proiecțiile forței rezultante F pe axele Ox, Oy, Oz, iar în (3) F_τ, F_n, F_b proiecțiile pe tangentă, normala principală și binormală.

Dacă toate forțele ce acționează asupra punctului material sînt conținute într-un plan (de exemplu în planul xOy) și viteza lui inițială este în același plan, mișcarea punctului are loc în planul forțelor. Într-o

Scanned with OKEN Scanner

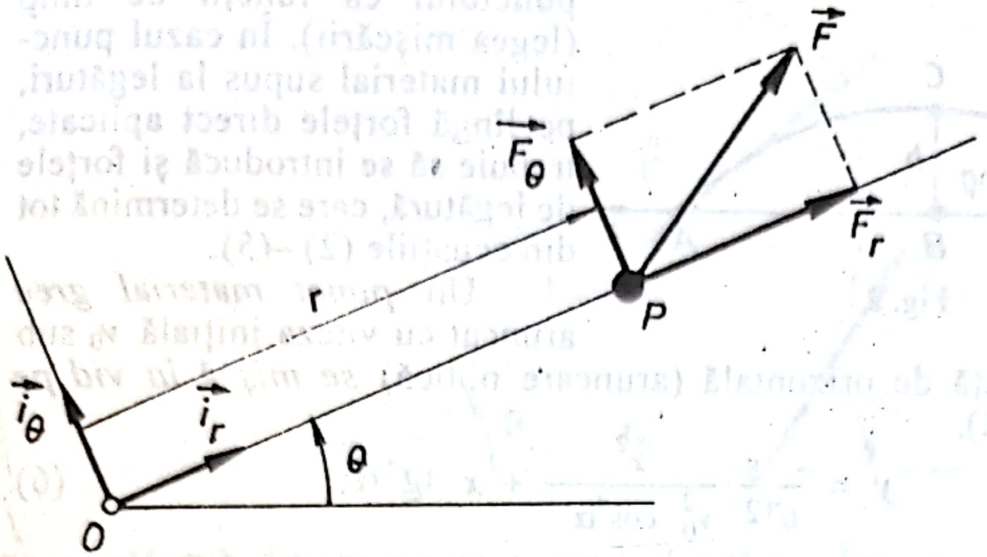


Fig. 1

asemenea situaţie ecuaţia vectorială (1) se proiectează numai pe două axe (Ox, Oy sau tangenta şi normala principală).

Pentru studiul unei mişcări plane se pot folosi şi coordonatele polare r şi θ. În acest caz ecuaţia vectorială (1) se proiectează pe direcţia lui r (direcţia radială, caracterizată prin versorul $\vec{i}_r$) şi pe o perpendiculară pe aceasta (direcţia transversală, caracterizată prin versorul $\vec{i}_\theta$), (fig. 1), rezultînd ecuaţiile diferenţiale scalare

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$$
$$m\,a_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = m\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = F_\theta. \tag{4}$$

Dacă forţele ce acţionează asupra punctului material sînt coliniare (de exemplu, sînt în direcţia axei Ox) şi viteza lui iniţială este de aceeaşi direcţie, mişcarea punctului va fi rectilinie (de-a lungul axei Ox). În acest caz ecuaţia vectorială (1) se proiectează pe o singură axă, rezultînd

$$m\ddot{x} = X \qquad \text{sau} \qquad m\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}t} = F, \tag{5}$$

unde X, respectiv F reprezintă proiecţia forţei rezultante pe direcţia mişcării.

Dacă punctul material este liber, în ecuaţiile (2) – (5) intervin numai forţe direct aplicate şi în acest caz necunoscutele sînt coordonatele

Scanned with OKEN Scanner

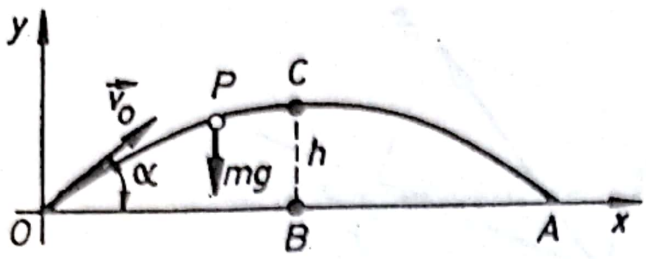


Fig. 2

punctului ca funcţii de timp (legea mişcării). În cazul punctului material supus la legături, pe lîngă forţele direct aplicate, trebuie să se introducă şi forţele de legătură, care se determină tot din ecuaţiile (2) –(5).

Un *punct material greu* aruncat cu viteza iniţială v_0 sub un unghi α faţă de orizontală (aruncare oblică) *se mişcă în vid pe parabola* (fig. 2).

$$y = -\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\ \mathrm{tg}\ \alpha. \tag{6}$$

Bătaia aruncării este

$$b = OA = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \tag{7}$$

iar înălţimea maximă la care se ridică punctul material este

$$h = y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha. \tag{8}$$

O forţă $\vec{F}$, al cărei suport trece mereu prin punctul fix O (fig. 3), se numeşte *forţă centrală.*

Dacă asupra unui punct material acţionează o forţă centrală, el se mişcă în planul determinat de vectorii $\vec{r}_0=\vec{OP}_0$ (P_0 este poziţia iniţială a punctului) şi $\vec{v}_0$ (viteza iniţială) cu viteza areolară $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\vec{r}\times\vec{v}$ constantă. Folosind coordonate polare, $\Omega = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}c$, unde $c=2\Omega=r^2\dot{\theta}$ reprezintă constanta ariilor. Aceasta poate fi determinată din condiţiile iniţiale:

$$c=|\vec{r}_0\times\vec{v}_0|=r_0 v_0\sin\alpha. \tag{9}$$

Ecuaţia diferenţială în coordonate polare a traiectoriei punctului material P, sub acţiunea forţei centrale F, este

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mc^2}, \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

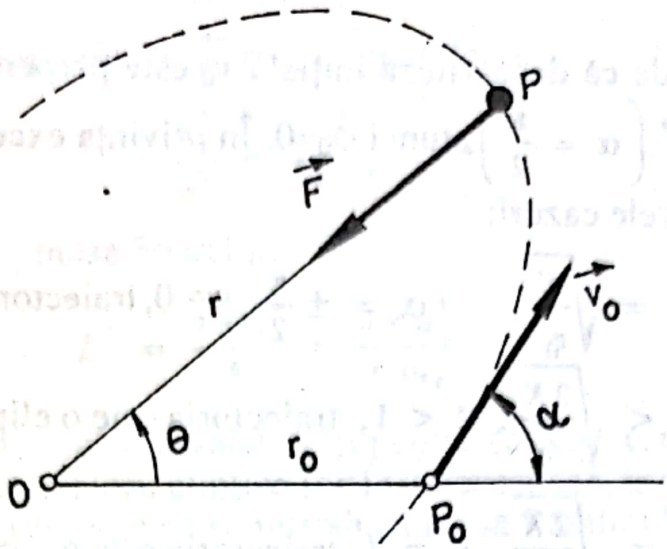


Fig. 3

cunoscută sub denumirea de *formula lui Binet*. În această formulă, F trebuie introdus cu semnul plus dacă este o forţă repulsivă şi cu minus dacă este forţă atractivă.

În cazul forţei de atracţie newtoniene $F = -f\frac{m_0 m}{r^2} = -\frac{Km}{r^2}$ $(K = fm_o)$ ecuaţia diferenţială (10) devine

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\,,\quad p = \frac{c^2}{K}\,. \tag{11}$$

Integrînd această ecuaţie diferenţială de ordinul doi cu coeficienţi constanţi $\left(\text{în}\,\frac{1}{r}\right)$, se obţine ecuaţia traiectoriei

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\,\cos\left(\theta - \varphi_0\right)}\,, \tag{12}$$

care reprezintă o conică cu focarul în centrul atractiv O, p fiind parametrul şi ε excentricitatea conicei.

În ecuaţia (12), ε şi φ_0 sînt constante de integrare, ce se determină cu relaţiile:

$$tg\ \varphi_0 = \frac{r_0 v_0^2\ \sin\ \alpha\ \cos\ \alpha}{K - r_0 v_0^2\ \sin^2\ \alpha} \tag{13}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2\ \sin^2\ \alpha}{K^2}\left(v_0^2 - 2\frac{K}{r_0}\right)}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se vede că dacă viteza inițială $\vec{v_0}$ este perpendiculară pe vectorul de poziție $\vec{r_0}$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ atunci $\varphi_0=0$. În privința excentricității, sînt posibile următoarele cazuri:

a) $v_0 = \sqrt{\frac{K}{r_0}}$, $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, traiectoria este un cerc,

b) $v_0 < \sqrt{\frac{2K}{r_0}}$, $\varepsilon < 1$, traiectoria este o elipsă,

c) $v_0 = \sqrt{\frac{2K}{r_0}}$, $\varepsilon = 1$, traiectoria este o parabolă,

d) $v_0 > \sqrt{\frac{2K}{r_0}}$, $\varepsilon > 1$, traiectoria este o hiperbolă.

În cazul unui corp (proiectil) aruncat de pe suprafața Pămîntului, r_0 reprezintă raza, iar m_0 masa Pămîntului ($r_0 = R = 6370$ km, $m_0 = m_P$). Din egalitatea $mg = \frac{Km}{R^2}$ rezultă în acest caz $K = fm_P = gR^2$.

Pentru ca acest corp (proiectil) să descrie un cerc în jurul Pămîntului (devenind satelit artificial al planetei noastre) trebuie să fie lansat sub unghiul $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ cu viteza

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{R}} = \sqrt{gR} = 7,905\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$ (prima viteză cosmică).

Pentru ca proiectilul să poată părăsi definitiv Pămîntul (mișcare interplanetară) este necesară o viteză de lansare.

$$v_0 \geq \sqrt{2gR} = 11,18\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$ (a doua viteză cosmică).

Mișcarea unei planete în jurul Soarelui se face, de asemenea, sub acțiunea forței de atracție newtoniene. În acest caz sînt valabile cele trei legi ale lui Kepler:

I. Planetele descriu elipse, Soarele ocupînd unul din focare.

II. Raza vectoare a planetei descrie arii egale în timpi egali (legea ariilor).

III. Raportul dintre pătratul timpului de revoluție T și cubul semiaxei mari a este același pentru toate planetele.

Scanned with OKEN Scanner

A treia lege se exprimă matematic prin relaţia

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K}, \tag{14}$$

de unde, notînd cu m_S masa Soarelui,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{K} = \frac{4\pi^2 a^3}{f\, m_S} \tag{15}$$

Evident, aceste legi sînt valabile şi pentru sateliţii care se mişcă în jurul Pămîntului pe traiectorii eliptice ($\varepsilon<1$). În acest caz, în relaţia (16) în loc de masa Soarelui trebuie să se introducă masa Pămîntului (m_P).

Pendulul matematic este un punct material care se poate mişca fără frecare sub acţiunea greutăţii proprii pe o traiectorie circulară, situată într-un plan vertical.

Perioada micilor oscilaţii ale pendulului matematic este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{16}$$

unde l reprezintă lungimea pendulului.

Impulsul (cantitatea de mişcare) a unui punct material este definit ca produsul dintre masa m şi viteza $\vec{v}$ a punctului: $\vec{h}=m\vec{v}$.

Momentul cinetic în raport cu un punct oarecare O este momentul impulsului în raport cu punctul O:

$$\vec{k}_0=\vec{r}\times\vec{h}=\vec{r}\times m\vec{v}. \tag{17}$$

Conform **teoremei impulsului**, derivata impulsului punctului material în raport cu timpul este egală în orice moment al mişcării cu rezultanta tuturor forţelor ce acţionează asupra punctului material

$$\dot{\vec{h}}=\vec{F}. \tag{18}$$

Teorema momentului cinetic se enunţă astfel: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material este egală cu momentul forţelor ce acţionează asupra punctului (cele două momente se calculează în raport cu acelaşi punct fix):

$$\dot{\vec{k}}_0=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}_0. \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Lucrul mecanic elementar al unei forţe $\vec{F}$ este produsul scalar dintre forţă şi deplasarea elementară $d\vec{r}$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz. \tag{20}$$

Lucrul mecanic efectuat de forţă între două poziţii A şi B se calculează prin integrare:

$$L_{A-B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{21}$$

Puterea mecanică reprezintă lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{22}$$

Energia cinetică a punctului material este

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \tag{23}$$

Teorema energiei cinetice:

– Diferenţiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar al tuturor forţelor, ce acţionează asupra punctului material:

$$dE_C = dL \text{ sau } d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dL \tag{24}$$

– Variaţia energiei cinetice a unui punct material între două poziţii A şi B este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forţele ce acţionează asupra punctului material între cele două poziţii:

$$E_{C_B} - E_{C_A} = L_{A-B} \quad \text{sau} \quad \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = L_{A-B}. \tag{25}$$

– Derivata energiei cinetice în raport cu timpul este egală cu puterea mecanică:

$$\frac{dE_c}{dt} = P. \tag{26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţele care derivă dintr-o funcţie de forţe $U(x, y, z)$ astfel încît

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{27}$$

se numesc *forţe conservative*. Lucrul mecanic al unei forţe conservative între două poziţii A şi B nu depinde de forma curbei pe care se deplasează punctul de aplicaţie al forţei, ci numai de cele două poziţii:

$$L_{AB}=U(x_B, y_B, z_B)-U(x_A, y_A, z_A). \tag{28}$$

Corpurile plasate în cîmpuri de forţe conservative, chiar dacă se află în repaus, posedă energie, numită *energie potenţială*, care într-o anumită poziţie este egală cu lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea corpului dintr-o poziţie cu energie nulă în poziţia respectivă, sau lucrul mecanic cu semn schimbat efectuat de forţele cîmpului în aceeaşi deplasare. Între energia potenţială E_p şi funcţia de forţă U există relaţia $E_p=-U$.

Prin definiţie, suma dintre energia cinetică şi energia potenţială se numeşte *energie mecanică*:

$$E_m=E_c+E_p. \tag{29}$$

Legea conservării energiei mecanice: energia mecanică a unui punct material situat într-un cîmp de forţe conservative este constantă.

În *studiul dinamic al mişcării relative* a unui punct material trebuie să se ţină seamă, pe lîngă forţele direct aplicate, şi de legătură de aşa-numitele *forţe complementare* sau *inerţiale* definite prin relaţiile

$$\vec{F}_t=-m\vec{a}_t \qquad \vec{F}_c=-m\vec{a}_c \tag{31}$$

unde $\vec{a}_t$ reprezintă acceleraţia de transport, iar $\vec{a}_c$ acceleraţia Coriolis. Astfel, legea lui Newton aplicată în raport cu un sistem de referinţă mobil, este

$$m\vec{a}_r=\vec{F}_d+\vec{F}_l+\vec{F}_t+\vec{F}_c. \tag{32}$$

Condiţia *repausului relativ* este

$$\vec{F}_d+\vec{F}_l+\vec{F}_t=0, \tag{33}$$

adică în poziţia de repaus relativ forţele date şi de legătură se află în echilibru cu forţa complementară de transport.

Scanned with OKEN Scanner

DINAMICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE. TEOREMELE GENERALE

În cazul unui sistem de puncte materiale, *impulsul total* H al sistemului se defineşte ca fiind suma impulsurilor tuturor punctelor materiale

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} \vec{h}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i, \tag{34}$$

iar momentul cinetic $\vec{K}_O$ în raport cu un punct O este suma momentelor cinetice ale tuturor punctelor materiale în raport cu punctul O:

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{h}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \tag{35}$$

Suma impulsurilor punctelor materiale în orice mişcare a sistemului este egală cu produsul dintre masa sistemului şi viteza centrului lui de greutate:

$$\vec{H} = M\vec{v}_c \tag{36}$$

Teorema impulsului:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{R}_d + \vec{R}_l. \tag{37}$$

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de puncte materiale este egală în orice moment al mişcării cu rezultanta tuturor forţelor date şi de legătură ce acţionează asupra sistemului.

Teorema mişcării centrului de greutate:

$$M\vec{a}_C = \vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{R}_d + \vec{R}_l. \tag{38}$$

Conform acestei teoreme, centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale se mişcă ca şi cum toată masa sistemului ar fi concentrată în acest punct şi toate forţele date şi de legătură ar acţiona în centrul de greutate.

Teorema conservării impulsului: dacă rezultanta forţelor ce acţionează asupra unui sistem de puncte materiale este nulă, impulsul

Scanned with OKEN Scanner

total al sistemului este constant (centrul de greutate al sistemului are viteza constantă).

Teorema momentului cinetic:

$$\dot{\vec{K}}_O=\vec{M}_O, \qquad \vec{M}_O=\vec{M}_{Od}+\vec{M}_{Oi}. \tag{39}$$

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale este egală în orice moment al mişcării cu momentul rezultant al tuturor forţelor date şi de legătură ce acţionează asupra sistemului.

Teorema, sub forma aceasta, este valabilă în raport cu orice punct fix, iar dintre punctele mobile în raport cu centrul de greutate al sistemului.

Teorema conservării momentului cinetic: dacă momentul rezultant al forţelor date şi de legătură ce acţionează asupra sistemului de puncte materiale în raport cu un punct este nul, momentul cinetic al sistemului în raport cu acel punct este constant.

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale este suma energiilor cinetice ale punctelor sistemulu

$$E_C=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2 \tag{40}$$

Conform **teoremei energiei cinetice,** diferenţiala energiei cinetice totale a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucrul mecanic elementar al tuturor forţelor date, de legătură şi interioare, ce acţionează asupra sistemului

$$\mathrm{d}E_c=\mathrm{d}L, \tag{41}$$

sau variaţia energiei cinetice totale a sistemului între două poziţii este egală cu lucrul mecanic al tuturor forţelor date, de legătură şi interioare, ce acţionează asupra punctelor sistemului între cele două poziţii:

$$E_{c2}-E_{c1}=L_{1-2}. \tag{42}$$

Dacă asupra punctelor sistemului acţionează numai forţe conservative, energia mecanică a sistemului ($E_m=E_c+E_p$) se conservă (teorema conservării energiei mecanice).

Scanned with OKEN Scanner

Impulsul, momentul cinetic şi energia cinetică a unui corp rigid se calculează cu integralele

$$\vec{H}=\int_{(V)}\vec{v}\,\mathrm{d}m \quad (73);\ \vec{K}_0=\int_{(V)}\vec{r}\times\vec{v}\,\mathrm{d}m \quad (74);$$
$$E_c=\frac{1}{2}\int_{(V)}v^2\,\mathrm{d}m. \qquad (43)$$

Pe baza formulei de definiţie (43) rezultă pentru impulsul unui corp rigid aceeaşi expresie ca în cazul unui sistem de puncte materiale şi anume: $\vec{H}=M\vec{v}_C$.

Expresiile care rezultă pentru momentul cinetic al unui corp în diferite mişcări sînt date în tabelul I.

Tabelul I

Mişcarea corpului rigid	Momentul cinetic în raport cu un punct O	Observaţii
Translaţie	$\vec{r}_C\times M\vec{v}_C=\vec{r}_C\times\vec{H}$	Momentul cinetic în raport cu centrul de greutate al corpului este nul
Rotaţie în jurul unei axe fixe	$-J_{xz}\omega\vec{i}-J_{yz}\omega\vec{j}+J_z\omega\vec{k}$	Axa Oz coincide cu axa de rotaţie
Mişcarea cu punct fix	$J_x\omega_x\vec{i}+J_y\omega_y\vec{j}+J_z\omega_z\vec{k}$	Axele Ox, Oy, şi Oz sînt axe principale de inerţie în raport cu punct fix O

Formulele cu care se calculează energia cinetică a unui corp rigid în diferite mişcări sînt trecute în tabelul II.

Pendulul fizic este un corp rigid care se poate roti în jurul unei axe fixe, orizontale, fără frecare, singura forţă direct aplicată fiind greutatea proprie.

Lungimea redusă a pendulului fizic (lungimea pendulului matematic sincron cu pendulul fizic) l_r este lungimea unui pendul matematic care se mişcă la fel (sincron) cu pendulul fizic. Ea se calculează cu relaţia

$$l_r=\frac{J_z}{Md}, \qquad (46)$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II

Mişcarea corpului rigid	Energia cinetică	Observaţii
Translaţie	$\frac{1}{2} M v_C^2$	
Rotaţie în jurul unei axe fixe	$\frac{1}{2} J_z \omega^2$	J_z este momentul de inerţie al corpului în raport cu axa fixă
Mişcarea plan-paralelă	$\frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2$	Axa z este perpendiculară pe planul mişcării şi trece prin centrul de greutate C al corpului
Mişcare cu punct fix	$\frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2$	Axele Ox, Oy, Oz sînt axe principale de inerţie în raport cu punctul fix O

în care: J_z reprezintă momentul de inerţie al pendulului în raport cu axa de rotaţie, M – masa lui, iar d – distanţa dintre centrul lui de greutate şi axa de rotaţie.

Giroscopul este un corp rigid de revoluţie avînd un punct fix situat chiar pe axa de simetrie, aflat în *mişcare de precesie regulată.*

Legătura dintre viteza unghiulară de rotaţie proprie $\vec{\omega}$, viteza unghiulară de precesie $\vec{\omega}_1$ şi momentul $\vec{M}$ al forţelor ce acţionează asupra giroscopului în raport cu punctul fix O este dată de relaţia

$$\vec{M} = J_z \left(1 + \frac{J_z - J_x}{J_z} \frac{\omega_1}{\omega} \cos\theta \right) \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}, \qquad (47)$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{\omega}$ şi $\vec{\omega}_1$.

Dacă $\omega >> \omega_1$, situaţie frecvent întîlnită în practică

$$\vec{M} \approx J_z \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \qquad (48)$$

Reacţiunea giroscopului asupra corpurilor cu care se află în legătură (respectiv asupra lagărelor care susţin axa giroscopului) se numeşte cuplu giroscopic. Dacă $\omega >> \omega_1$

$$\vec{M}_g = J_z \vec{\omega} \times \vec{\omega}_1 \qquad (49)$$

Scanned with OKEN Scanner

Principiul lui d'Alembert, matematic, se exprimă prin relaţiile:

$$\vec{R}_d+\vec{R}_l+\vec{R}_I=0,$$
$$\vec{M}_{Od}+\vec{M}_{Ol}+\vec{M}_{OI}=0. \qquad (50)$$

Conform acestui principiu, forţele date şi de legătură ce acţionează asupra sistemului se află în echilibru în orice moment al mişcării cu forţele de inerţie. Torsorul forţelor de inerţie poate fi determinat prin relaţiile:

$$\vec{R}_I=-\dot{\vec{H}}=-M\vec{a}_c; \quad \vec{M}_{OI}=-\dot{\vec{K}}_O \qquad (51)$$

Principiul deplasărilor virtuale sau principiul lucrului mecanic virtual spune că lucrul mecanic elementar virtual al tuturor forţelor date, de legătură, interioare şi de inerţie este nul în orice deplasare virtuală (compatibilă sau incompatibilă cu legăturile) a sistemului:

$$\delta L=0. \qquad (52)$$

Principiul poate fi aplicat atît la rezolvarea problemelor de dinamică, cît şi în cazul problemelor de statică (în acest caz, evident nu apar forţe de inerţie).

Dacă se urmăreşte studiul mişcării unui sistem sau determinarea poziţiei de echilibru trebuie să se dea sistemului deplasări virtuale compatibile cu legăturile, iar pentru determinarea reacţiunilor dinamice sau statice – deplasări virtuale incompatibile cu legăturile.

Principiul lui Toricelli se referă la poziţia de echilibru a unui sistem de corpuri, asupra căruia acţionează ca forţe direct aplicate numai greutăţile corpurilor, sistemul fiind supus la legături ideale.

În poziţia de echilibru $\delta z_C=0$ (axa z este verticală), adică centrul de greutate ocupă poziţia cea mai de jos (echilibru stabil), cea mai de sus (echilibru instabil) sau rămîne prin deplasarea sistemului în acelaşi plan orizontal (echilibru indiferent).

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}=Q_i, \quad (i=1, 2, ..., n). \tag{53}$$

Pentru formarea acestor ecuaţii trebuie întîi aleşi parametrii independenţi q_1, q_2, ..., q_n (coordonatele generalizate), care determină poziţia sistemului. Apoi trebuie să se exprime energia cinetică a sistemului în funcţie de coordonatele şi vitezele generalizate ($\dot{q}_i$) şi să se determine forţele generalizate Q_i, dînd sistemului deplasării virtuale în care variază cîte un singur parametru (q_i):

$$Q_i=\frac{\delta L_i}{\delta q_i}, \quad (i=1, 2, ..., n). \tag{54}$$

În cazul în care toate forţele care acţionează asupra sistemului sînt conservative, ecuaţiile lui Lagrange pot fi scrise mai concentrat şi anume

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad (i=1, 2, ..., n) \tag{55}$$

în care $L=E_c+U=E_c-E_p$ reprezintă potenţialul cinetic.

CIOCNIRI

Se consideră la început ciocnirea a două corpuri, care efectuează înainte de ciocnire mişcări de translaţie. Se admite că în punctul de contact cele două corpuri au un plan tangent comun şi o normală comună. Dacă centrele de greutate C_1 şi C_2 ale celor două corpuri se găsesc în momentul ciocnirii pe normala comună, ciocnirea se numeşte *centrică* (centrală), în caz contrar *excentrică*. Dacă vitezele corpurilor înainte de ciocnire sînt paralele cu normala comună, ciocnirea se numeşte *dreaptă*, iar dacă cel puţin una din viteze nu este paralelă cu normala comună, ciocnirea se numeşte *oblică*. În fig. 4, *a* se dă un exemplu de ciocnire

Scanned with OKEN Scanner

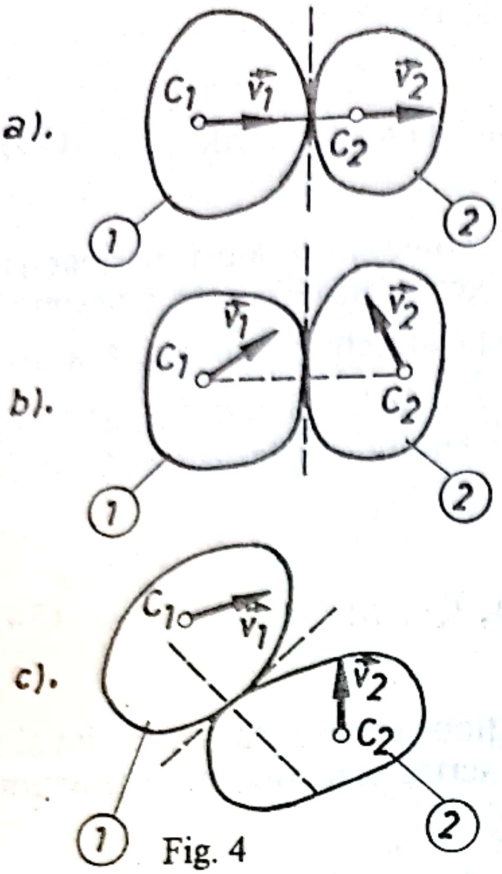


Fig. 4

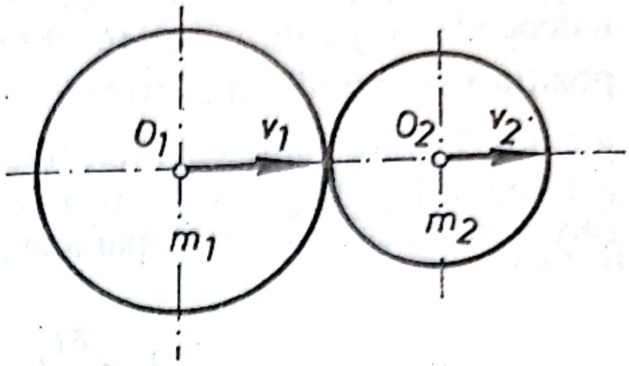


Fig. 5

centrică dreaptă, în fig. 4, *b* un exemplu de ciocnire centrică oblică, iar în fig. 4, *c* s-a reprezentat o ciocnire excentrică oblică.

Pentru studiul fenomenelor de ciocnire se aplică teorema variației cantității de mișcare și teorema variației momentului cinetic.

Variația impulsului total în timpul ciocnirii este egală cu suma tuturor percuțiilor:

$$\vec{H}_1 - \vec{H}_0 = \Sigma \vec{P}_i \tag{56}$$

Percuțiile interioare, ca și forțele interioare, sînt două cîte două egale în mărime și de sensuri opuse, astfel încît suma lor este nulă.

Variația în timpul ciocnirii a momentului cinetic al sistemului, calculat în raport cu un punct oarecare, este egală cu suma momentelor percuțiilor în raport cu același punct:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{P}_i \tag{57}$$

Suma momentelor percuțiilor interioare este de asemenea nulă.

Scanned with OKEN Scanner

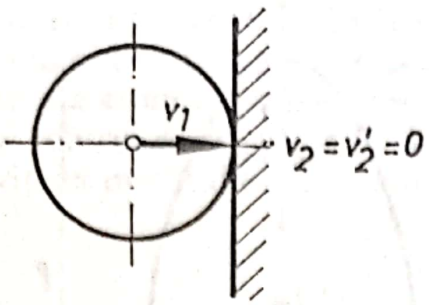


Fig. 6

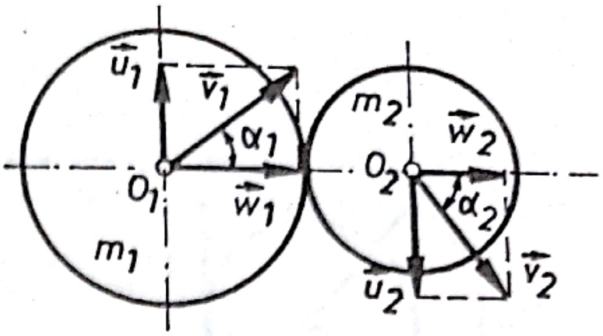


Fig. 7

În cazul *ciocnirii drepte a două sfere* (fig. 5), respectiv în cazul ciocnirii centrice drepte a două corpuri, direcţia vitezelor nu se schimbă. Valorile vitezelor după ciocnire se pot détermina cu relaţiile

$$v_1' = v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(1+k)}{1+\frac{m_1}{m_2}}, \quad v_2' = v_2 \frac{(v_1 - v_2)(1+k)}{1+\frac{m_2}{m_1}} \tag{58}$$

în care k reprezintă *coeficientul de restituire*. Acesta caracterizează gradul de deformabilitate al corpurilor, fiind egal cu raportul vitezelor relative după şi înainte de ciocnire cu semn schimbat:

$$k = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}. \tag{59}$$

În cazul ciocnirii perfect elastice $k=1$, iar în cazul ciocnirii plastice $k=0$.

Dacă o sferă se ciocneşte cu un perete fix (fig. 6), avînd înainte şi după ciocnire viteză nulă ($v_2=v_2'=0$), viteza sferei după ciocnire va fi $v_1'=-kv_1$.

O problemă importantă în studiul ciocnirilor este determinarea pierderii de energie cinetică în timpul ciocnirii. În cazul ciocnirii drepte a două sfere, această pierdere de energie cinetică este:

$$\Delta E_c = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2) . \tag{60}$$

Se vede că pentru $k=1$ rezultă $\Delta E_C=0$, adică în cazul ciocnirii elastice nu apare pierdere de energie cinetică. Pierderea este maximă în cazul ciocnirii perfect plastice ($k=0$).

În cazul *ciocnirii oblice a două sfere* (fig. 7), vitezele lor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ formează cu linia centrelor unghiurile α_1 şi α_2.

Scanned with OKEN Scanner

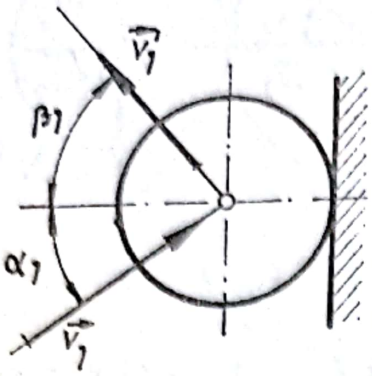


Fig. 8

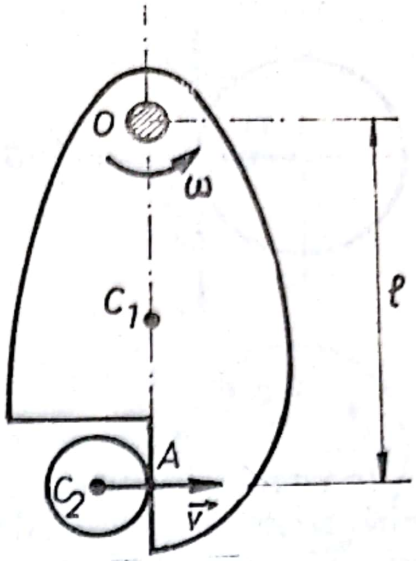


Fig. 9

Se descompune fiecare viteză în două componente, după direcţia normalei comune ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$) şi după o direcţie perpendiculară pe aceasta ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$). Dacă se neglijează frecările, componentele tangenţiale $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ nu se modifică în timpul ciocnirii, se modifică doar componentele normale $\vec{w}_1$ şi $\vec{w}_2$. Valorile w_1' şi w_2' ale acestora după ciocnire se calculează cu formulele (58) de la ciocnirea dreaptă. Vitezele celor două sfere după ciocnire vor fi:

$$\vec{v}_1' = \vec{w}_1' + \vec{u}_1, \quad \vec{v}_2' = \vec{w}_2' + \vec{u}_2.$$

Dacă o sferă se ciocneşte oblic cu un perete fix (fig. 8), ($v_2 = v_2' = 0$), viteza sferei după ciocnire va avea mărimea

$$v_1' = v_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + k^2 \cos^2 \alpha_1} \tag{61}$$

şi va forma cu normala unghiul β_1, dat de relaţia:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha_1. \tag{62}$$

Se mai prezintă *ciocnirea unei sfere cu un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe.* Se consideră cunoscute viteza $\overline{v}$ a sferei şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ a corpului cu axă fixă înainte de ciocnire şi se caută viteza $\overline{v}'$ şi viteza unghiulară $\overline{\omega}'$, după ciocnire. Problema poate fi rezolvată folosind teorema variaţiei momentului cinetic. Dacă prezintă interes şi percuţiile de legătură pentru determinarea lor, trebuie să se aplice teorema

Scanned with OKEN Scanner

variației impulsului. Dacă viteza sferei înainte de ciocnire are direcția normalei comune a celor două corpuri în punctul de contact A (fig. 9) și normala comună este perpendiculară pe dreapta determinată de punctul O și centrul de greutate C_1 (ciocnire excentrică dreaptă), viteza v' a sferei și viteza unghiulară ω' a corpului după ciocnire se determină cu relațiile

$$v' = v - \frac{(v - \omega \cdot l)(1 + k)}{1 + \frac{ml^2}{J}}, \tag{63}$$

$$\omega' = \omega + \frac{(v - \omega \cdot l)(1 + k)}{l\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)}, \tag{64}$$

în care: m reprezintă masa sferei, iar J momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație.

Pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii este:

$$\Delta E_C = \frac{mJ}{2\left(ml^2 + J\right)} (v - \omega \cdot l)^2 (1 - k^2) . \tag{65}$$

Percuția de legătură este nulă, dacă:

$$l = \frac{J}{Md} = l_r , \tag{66}$$

adică dacă distanța de la punctul A în care apare percuția la axa de rotație este egală cu lungimea redusă a pendulului fizic (corpul cu axă fixă, dacă această axă este orizontală, reprezintă un pendul fizic). Acest punct se numește *centru de percuție* și cunoașterea lui este importantă în multe aplicații practice.

VIBRAȚIILE SISTEMELOR LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE

Modelul mecanic al unui *sistem vibrant cu un grad de libertate* este reprezentat în fig. 10.

Dacă forța de amortizare este neglijabilă ($c \approx 0$) și nu există forța perturbatoare [$F(t)=0$], rezultă *vibrații libere neamortizate*. Ecuația diferențială a acestor vibrații este

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{67}$$

Scanned with OKEN Scanner

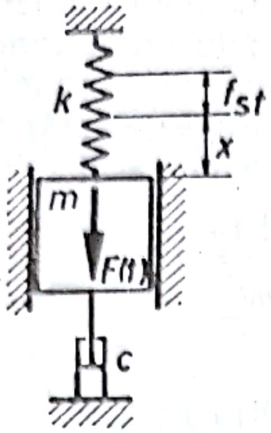


Fig. 10

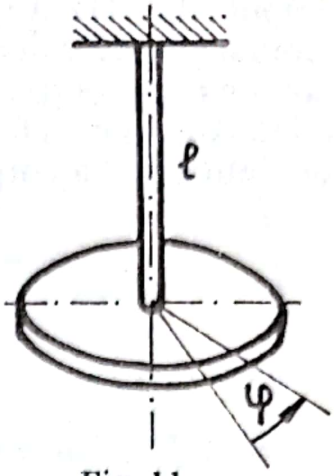


Fig. 11

dacă deplasarea x se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului în care arcul are deformaţia $f_{st}=mg/k$.

Legea mişcării se poate scrie sub două forme echivalente,

$$x=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t=A\sin(\omega_n t+\varphi) \tag{68}$$

unde C_1 şi C_2, respectiv A şi φ sînt constante de integrare, ce se determină din condiţiile iniţiale. Între aceste constante există relaţiile

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{C_1}{C_2}. \tag{69}$$

Parametrul ω_n din legea de mişcare reprezintă *pulsaţia proprie* sau *pulsaţia naturală* a sistemului:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}. \tag{70}$$

În loc de arc elicoidal putem avea ca element elastic o bară dreaptă supusă la întindere confecţionată din oţel, cauciuc etc. sau o bară supusă la încovoiere

Vibraţii libere neamortizate cu un grad de libertate sînt şi vibraţiile de torsiune ale sistemelor cu schema din fig. 11. Dacă momentul de inerţie al volantului în raport cu axa de rotaţie este J şi constanta elastică la torsiune se notează cu k, ecuaţia diferenţială a vibraţiilor de torsiune ia forma

$$J\ddot{\varphi}+k\varphi=0. \tag{71}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aici φ reprezintă unghiul de rotaţie al volantului măsurat din poziţia de echilibru static. Dacă elementul supus torsiunii este o bară de lungime l, constanta elastică se calculează cu formula

$$k = \frac{GI_p}{l}, \tag{72}$$

în care: G este modulul de elasticitate transversal, iar I_p momentul de inerţie polar al secţiunii transversale a barei.

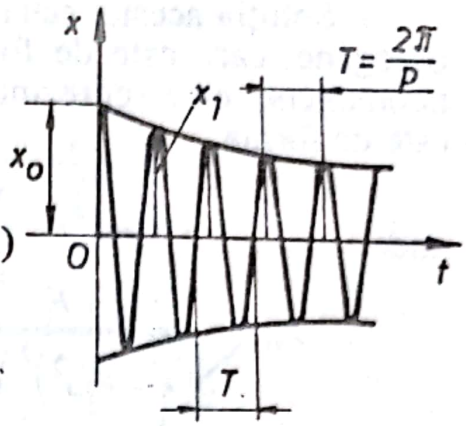


Fig. 12

Dacă asupra corpului de masă m din fig. 10 acţionează, pe lîngă forţa elastică, şi forţa de amortizare, rezultă *vibraţii libere amortizate*. Ecuaţia diferenţială a mişcării în acest caz este

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0. \tag{73}$$

Dacă $c<c_{cr}=2m\omega_n=2\sqrt{km}$, soluţia ecuaţiei diferenţiale (73) se poate scrie sub forma

$$x=Ae^{-ht}\cos(pt+\psi). \tag{74}$$

unde

$$h=\frac{c}{2m}, \qquad p=\sqrt{\omega_n^2-h^2}, \tag{75}$$

iar A şi ψ sînt constante de integrare.

Datorită factorului e^{-ht} din legea de mişcare (74), elongaţiile maxime scad (fig. 12). Deoarece unele elemente ale mişcării se repetă periodic, mişcarea se numeşte *pseudoperiodică*.

Decrementul logaritmic este logaritmul natural al cîtului dintre două elongaţii maxime succesive de acelaşi semn:

$$\delta=\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)=hT=\frac{c}{2m}T=\frac{c}{2m}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}}. \tag{76}$$

Forţa de excitaţie $F(t)$ este în general o funcţie periodică de timp. Ea produce *vibraţii forţate*. Dacă forţa de excitaţie este armonică, $F(t)=F_0\sin\omega t$, ecuaţia diferenţială a vibraţiilor forţate este

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t \tag{77}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestei ecuații se compune din soluția generală a ecuației omogene, care este de forma (74) și o soluție particulară a ecuației neomogene, care reprezintă de fapt vibrația forțată. Aceasta din urmă este de forma

$$x_f = x_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{78}$$

unde

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \tag{79}$$

$$x_{st} = \frac{F_0}{k},$$

$$tg\ \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \tag{80}$$

Variația amplitudinii x_0 și a defazajului φ, pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare c, sînt date în graficele din fig. 13 și fig. 14.

Amplitudinea maximă (de rezonanță) se produce pentru

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2} \tag{81}$$

și are valoarea

$$x_{0r} = \frac{x_{st}}{2\frac{c}{c_{cr}}\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}}. \tag{82}$$

Dacă amortizarea este slabă ($c << c_{cr}$), se poate admite că amplitudinea maximă se produce pentru $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$. În acest caz relația (82) se poate aproxima prin

$$x_{0r} \approx \frac{x_{st}}{2\frac{c}{c_{cr}}}. \tag{83}$$

Scanned with OKEN Scanner

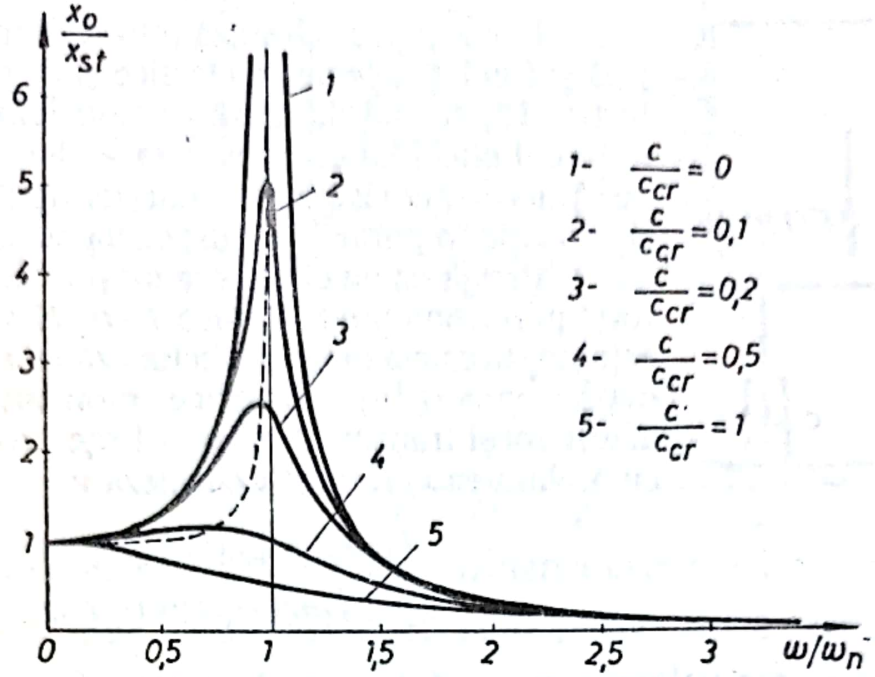


Fig. 13

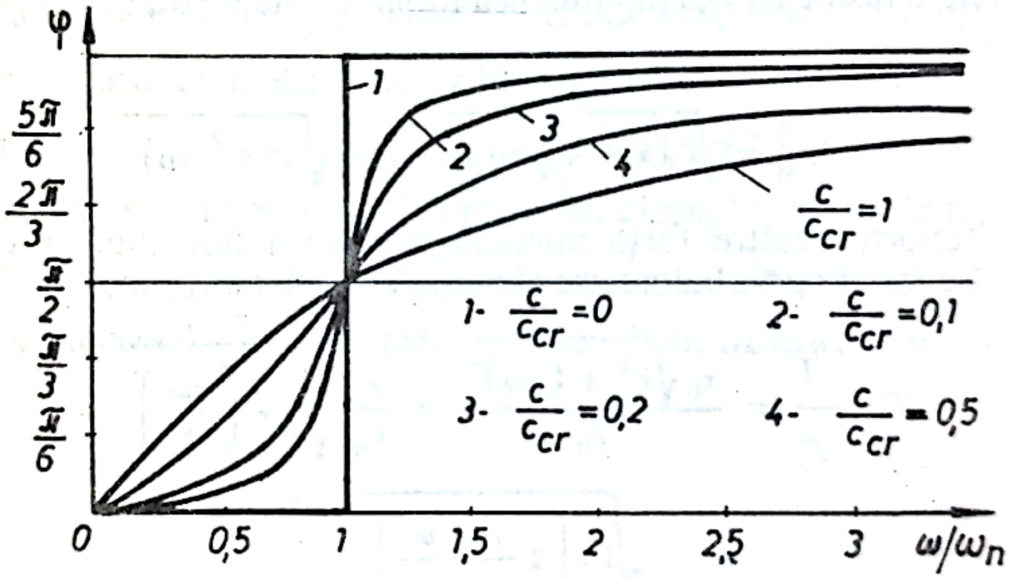


Fig. 14

Una din problemele importante legate de vibraţii mecanice este *izolarea antivibratorie*. În multe maşini, care conţin piese mobile neechilibrate, iau naştere forţe perturbatoare. *Izolarea activă* înseamnă împiedicarea transmiterii acestor forţe fundaţiei. Fundaţia la rîndul ei poate să vibreze şi în acest caz se pune problema ca vibraţiile transmise maşinii (aparatelor) să se reducă cît mai mult (*izolare pasivă*).

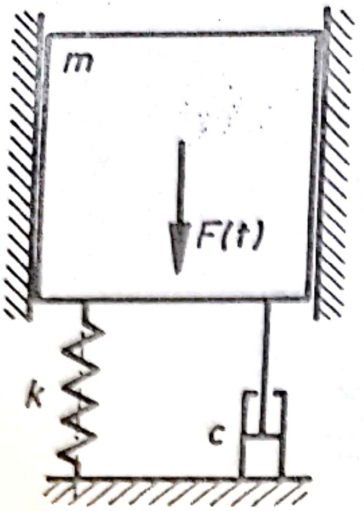


Fig. 15

Izolarea se realizează introducînd între maşină şi fundaţie elemente elastice şi de amortizare. În fig. 15, corpul de masă m modelează maşina, iar arcul elicoidal cu constanta k elementul elastic. Amortizorul vîscos este conectat rigid de maşină şi fundaţie în paralel cu suspensia elastică.

Presupunem că asupra maşinii acţionează o forţă perturbatoare armonică $F(t)=F_0 \sin \omega t$. Sub acţiunea acesteia maşina efectuează vibraţii forţate după legea (7.8). În orice moment arcul şi amortizorul transmit fundaţiei forţe proporţionale cu deplasarea x_f respectiv cu viteza $v=\dot{x}_f$ a masei m:

$$F_1=kx_f=kx_0 \sin(\omega t-\varphi)$$

$$F_2=c\dot{x}_f=c\omega x_0 \cos(\omega t-\varphi).$$

Forţa F_1 are valoarea maximă kx_0, iar F_2, $c\,\omega x_0$. Cum cele două forţe sînt defazate cu $\frac{\pi}{2}$, amplitudinea forţei rezultante transmise fundaţiei este

$$F_{T_0}=\sqrt{(kx_0)^2+(c\omega x_0)^2}=x_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}.$$

Raportul dintre forţa maximă transmisă fundaţiei şi valoarea maximă a forţei perturbatoare se numeşte *transmisibilitate*:

$$T=\frac{F_{T_0}}{F_0}=\frac{x_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{F_0}=\frac{x_0}{x_{st}}\sqrt{1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad (84)$$

Reprezentarea grafică a lui T în funcţie de $\frac{\omega}{\omega_n}$, pentru diferite valori ale raportului $\frac{c}{c_{cr}}$, este dată în fig. 16. Se vede că pentru $\frac{\omega}{\omega_n}<\sqrt{2}$

Scanned with OKEN Scanner

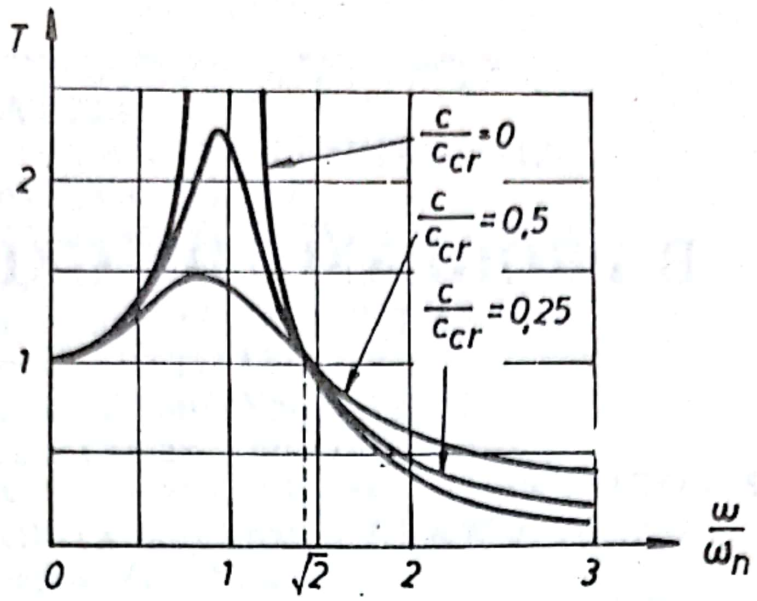


Fig. 16

transmisibilitatea este supraunitară. Izolarea este eficace ($T<1$) numai pentru $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$. Transmisibilitatea este cea mai mică pentru montajul numai cu elemente elastice $\left(\frac{c}{c_{cr}} = 0\right)$ şi creşte cînd raportul $\frac{c}{c_{cr}}$ creşte. Deci, în acest domeniu efectul amortizării este defavorabil. Totuşi, folosirea amortizării la izolarea antivibratorie este indicată deoarece ea reduce transmisibilitatea în domeniul $\frac{\omega}{\omega_n} \in \left(0, \sqrt{2}\right)$ care cuprinde şi cazul rezonanţei. La pornire şi la oprire, de exemplu, maşinile trec prin turaţia critică corespunzătoare lui $\omega=\omega_n$, deoarece în general ele funcţionează în domeniul $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$, pentru a avea o bună izolare a vibraţiilor.

Scanned with OKEN Scanner

B. PROGRAME DE CALCUL

În această anexă sînt date acele programe de calcul folosite la rezolvarea unor probleme din culegere, care nu au fost prezentate în cadrul rezolvărilor.

Înaintea fiecărui program se indică numărul problemei la rezolvarea căreia s-a folosit şi unde este cazul şi conţinutul programului. Programul „GRAFUNC", elaborat pentru reprezentarea grafică a funcţiilor reale de o variabilă reală a fost folosit în cadrul mai multor probleme. Acesta se prezintă la început o singură dată, iar pe parcurs se face doar referire la el.

Pentru tipărirea graficelor cu imprimanta Robotron K 6313 se foloseşte programul COPYROB, care se activează cu instrucţia RANDOMIZE USR 65 160.

TRASAREA GRAFICELOR FUNCŢIILOR REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

```
10 REM GRAFUNC
20 REM Trasarea graficelor
30 REM funcţiilor reale
40 REM de o variabilă reală
50 REM
60 REM Iniţializare
70 LET Xdom=256: LET Ydom=176
80 LET Carlat=8: LET Carinl=8
100 INK 0: PAPER 7: BORDER 5: C LS
```


Scanned with OKEN Scanner

```
120 INPUT "Xmin="; Xmin; "Xmax="; Xmax
125 PRINT AT 21,0;"       "
130 IF Xmin>=Xmax THEN PRINT AT 21,0;
"Xmin>=Xmax": GO TO 120
133 INPUT "Ymin="; Ymin; "Ymax="; Ymax
135 PRINT AT 21, 0;"       "
137 IF Ymin>=Ymax THEN PRINT AT 21,0;
"Ymin>=Ymax": GO TO 133
138 LET Yunit=(Ydom/ (Ymax–Ymin)
140 LET Xpas= (Xmax–Xmin)/Xdom
150 IF Xmax * Xmin>0 OR Xmax=0 THEN GO TO 165
160 PLOT ABS (Xmin)/Xpas, 0: DRAW 0, Ydom–1
165 LET Ydepl=–Ymin*Yunit
170 IF Ymax*Ymin>0 OR Ymax=0 THEN GO TO 190
180 PLOT 0, Ydepl: DRAW Xdom–1, 0
190 REM
200 REM Gradarea axei Ox
210 REM
220 LET Xunit=(Xdom/ (Xmax–Xmin)
230 LET Xfact=1
240 IF Xunit*Xfact>=Carlat THEN GO TO 260
250 LET xfact=Xfact*10: GO TO 240
260 IF Xunit*Xfact<Xdom/2 THEN GO TO 280
270 LET Xfact=Xfact*0.1: GO TO 260
280 LET x0=–Xmin*Xunit
285 IF x0>=0 THEN LET x0=x0–
Xunit*Xfact: GO TO 285
290 IF x0<0 THEN LET x0=x0+Xunit
*Xfact: GO TO 290
305 LET yox= (Ymin*Ymax<0) * (Ydep
1+2)+(Ymin*Ymax>=0)*4
310 PLOT x0, yox: DRAW 0, –4
320 LET x0=x0+Xunit*Xfact
330 IF x0<Xdom–1 THEN GO TO 310
332 LET Yfact=1
335 IF Yunit*Yfact>=Carin1 THEN GO TO 341
338 LET Yfact=Yfact*10: GO TO 335
341 IF Yunit*Yfact<Ydom/3 THEN GO TO 347
344 LET Yfact=Yfact*0.1: GO TO 341
347 LET a=0
```


Scanned with OKEN Scanner

```
349 IF Ydepl>Ydom/2 THEN LET a=20
350 PRINT AT a,1; "x:"; Xmin; ",";
Xmax;"/"; Xfact;" y:"; Ymin;","; Ymax;"/"; Yfact
360 LET y0=-Ymin*Yunit
365 IF y0>=0 THEN LET
 y0=y0-Yunit*Yfact: GO TO 365
370 IF y0<0 THEN LET y0=y0+Yunit
*Yfact: GO TO 370
390 LETxoy=(Xmin*Xmax<0)*(-Xmin
*Xunit+2)+(Xmin*Xmax>=0)*4
400 PLOT xoy, y0: DRAW -4,0
410 LET y0=y0+Yunit*Yfact
420 IF y0<Ydom-2 THEN GO TO 400
425 GO TO 700
474>REM
476 REM Subrutina GRAFIC
478 REM
480 LET t=0: LET x=Xmin
490 FOR f=0 TO 255
500 LET y=Yunit*VAL e$
505 LET Yplot=INT (y+Ydepl)
510 IF (Yplot<0) OR (Yplot>=Ydom-1)
THEN LET t=0: GO TO 540
520 IF NOT t THEN PLOT f, Yplot:
 LET t=1: GO TO 540
530 DRAW 1, Yplot-oldy
540 LET oldy=Yplot
550 LET x=x+Xpas
560 NEXT f
561 REM
562 REM Tabelare
563 REM
565 INPUT "Tabel de valori? (D, N):"; c$
570 IF NOT (c$="D" OR c$="d")
THEN GO TO 695
575 INPUT "Parametru?:"; p$
587 LET Tmin=Xmin: LET
Tmax=Xmax: LET Tpas=Xpas
590 INPUT "Schimbi Xmin,
Xmax, Xpas? D,N:";c$
```


Scanned with OKEN Scanner

```
595 IF NOT (c$="D" OR c$="d")
THEN GO TO 605
600 INPUT "Xmin="; Tmin;" Xmax=";
Tmax;" Xpas="; Tpas
605 REM
610 LET x=Tmin
612 LPRINT "F(x)="; e$
613 IF p$<>" " THEN LPRINT
 p$; "="; VAL p$
614 LPRINT: LPRINT "x", " F (x)"
615 FOR i=1 TO 64
620 LPRINT x, VAL e$
625 LET x=x+Tpas
630 IF x>Tmax THEN GO TO 695
635 NEXT i
640 INPUT "Schimba pagina si
apasa ENTER"; c$
645 GO TO 612
695 RETURN
```

1.6. Reprezentarea grafică a funcţiei $v_0=v_0(\alpha)$ şi a traiectoriei proiectilului pentru diferite valori ale vitezei v_0 şi ale unghiului α de lansare.

```
Se pune prog. GRAFUNC
700>REM
710 REM P 1.6
720 REM
730 REM Aruncarea oblica
740 REM
750 IF sw=1 THEN GO TO 900
760 LET a=295: LET b=52
770 LET g=9.81
780 LET Xmin=ATN (b/a)
790 LET e$=" a*SQR (g/ (2*COS x
*(a*SIN x–b*COS x)))"
800 GO SUB 480
810 PRINT #0; AT 0,0; "P
 10.6 Aruncarea oblica"
820 PRINT #0; AT 1,1; "a="; a;" b="; b
830 PAUSE 0
```


Scanned with OKEN Scanner

```
840 RANDOMIZE USR 65160
843 PAUSE 0
845 LET sw=1
850 GO TO 100
860 DATA 3,58.725,. 8726, 93.96,.
34697, 93. 96,1. 3983
870 DIM t$(9)
900 READ n
905 LET Xmax=a
907 LET e$="x* (c1*x+c2)"
910 FOR k=1 TO n
920 READ v0, alf
930 LET c1=–g/ (2*v0*v0*(COS alf) ^2)
940 LET c2=TAN alf
950 GO SUB 480
960 LET t$=STR$ v0: PRINT AT (k–1)
 *3+1,20; "v0="; v0
970 LET t$=STR$ alf: PRINT AT (k–1)
*3+2,20; "alf="; alf
980 LET x=(Xmax–Xmin) /2
990 LET x1=x*Xunit–Xmin*Xunit:
LET y1=(VAL e$) *Yunit+Ydepl
1000 LET x2=20*Carlat: LET
y2=Ydom– (k*3–1)*Carin1
1010 PLOT x1,y1: DRAW x2–x1, y2–y1
1020 NEXT k
1030 PRINT #0; AT 0,0· "P 1.0.6
Aruncarea oblica"
1040 PRINT #0; AT 1,1; "Functia y
pt. dif. v0 si alfa"
1050 PAUSE 0
1060 RANDOMIZE USR 65160
```

2.12. Reprezentarea grafică a eforturilor N_1 şi N_2, raportate la greutatea Mg în funcţie de unghiul φ

```
700 REM
705 REM P 2.12
707 REM
710 LET t$=".5*(3*SIN x* (COS x+SIN x)–4)"
```


Scanned with OKEN Scanner

```
715 LET sq12=1/SQR 2
720 LET d$="sq12* (4–3*SIN x*SIN x)"
730 LET e$=t$: INK 1: GO SUB 480
740 LET e$=d$: INK 2: GO SUB 480
750 PRINT #0; AT 0,0; "P12.1.12"
760 PRINT #0; AT 1,1;
"Functiile N1/Mg si N2/Mg"
770 PAUSE 0
790 STOP
1430 REM
1440 REM Desenarea unui grafic
1450 REM
1460 INPUT "F (X) ="; e$; "culoare="; c
1470 INK c
1471 GO SUB 480
1472 GO TO 1460
```

2.24. Reprezentarea traiectoriilor de fază pentru diferite valori ale parametrului $\lambda=\omega_0\sqrt{\frac{R}{g}}$.

```
700 REM
705 REM P2.24
707 REM
708 DATA 0.6, 0.8, 1.069, 1.2, 1.14,0
709 LET u$=" (7*lmbd*lmbd–4*
(1–COS x)) / (11–4*COS x)"
710 LET t$="SQR (u)"
720 LET d$="–SQR (u)"
723 READ lmbd
727 IF lmbd=0 THEN GO TO 750
730 LET e$=t$: GO SUB 480
740 LET e$=d$: GO SUB 480
745 GO TO 723
750 PRINT #0; AT 0,0; "P12.1.24"
760 PRINT #0; AT 1,1;
"Functia Phi? *SQR (R/g)"
770 PAUSE 0
790 STOP
1430 REM
1440 REM Desenarea unui grafic
```


Scanned with OKEN Scanner

```
1450 REM
1460 INPUT "F(X)="; e$;" culoare="; c
1470 INK c
1471 GO SUB 480
1472 GO TO 1460
```

3.18. Calculul valorilor şi reprezentarea grafică a vitezei unghiulare ω şi a acceleraţiei unghiulare ε în funcţie de unghiul φ pentru diferite condiţii iniţiale.

```
699>REM Se pune prog. GRAFUNC
700 REM
701 REM Angrenaj cu roti dintate
703 REM
707 LET g=9.81
710 LET e=.16
720 LET ge=g/e
730 LET g2e=2*ge
740 LET w$="SQR (w0*w0+g2e*
(1–COS x+1*SIN x)/(1+1))"
750 LET v$=" (SIN x+1*COS x)*ge/(1+l)"
755 IF sw=1 THEN GO TO 880
760 REM
770 REM Caz 1 w0=0
780 REM
790 DATA 1,2
800 LET w0=0
810 FOR n=1 TO 2
820 INK n
830 READ 1: PRINT AT 2, (n–1)
*10+1; "lmb=";1
840 LET e$=w$: GO SUB 480
850 LET e$=v$: GO SUB 480
860 NEXT n
862 PRINT #0; AT 0,0;
"Angrenaj cu roti dintate"
864 PRINT #0; AT 1,1;
"Functiile w si E w0=0"
866 PAUSE 0
868 RANDOMIZE USR 65160
```


Scanned with OKEN Scanner

```
870 PAUSE 0
880 REM
890 REM Caz 2 w0=f (1)
900 REM
910 RESTORE
920 FOR n=1 TO 2
930 INK n
940 READ 1: PRINT AT 2, (n–1) *10+1; "lmb=";1
945 LET w0=SQR (g2e* (SQR (1*1+1)–1)/(1+1))
950 LET e$=w$: GO SUB 480
960 LET e$=v$: GO SUB 480
970 NEXT n
972 PRINT #0; AT 0,0; "Angrenaj cu roti dintate"
974 PRINT #0; AT 1,1; "Functiile w si E w0=f (1)"
976 PAUSE 0
978 RANDOMIZE USR 65160
980 PAUSE 0
990 STOP
1430 REM
1440 REM Desenarea unui grafic
1450 REM
1460 INPUT "F(X)="; e$;" culoare=";c
1470 INK c
1471 GO SUB 480
1472 GO TO 1460
1900 RESTORE
2000 DATA 1, 2, 5
2010 READ l
2020 PRINT 1,2*(ATN (–1)+PI)
2030 GO TO 2010
```

3.22. Calculul valorilor funcţiilor $x(t)$, $v_x(t)$; $T(t)$; $N(t)$, $\frac{T}{N}$ şi reprezentarea lor grafică.

```
699>REM Se pune prog. GRAFUNC
700 REM
702 REM Rostogolire disc pe
704 REM plan inclinat mobil
706 REM
707 LET g=9.81
```


Scanned with OKEN Scanner

```
710 LET w=.12
720 LET M=3
730 LET R=.048
740 LET g215w=(2*g) / (5*w)
750 LET g215w2=g215w/w
760 LET rad32=SQR (3/2)
770 LET rad23=SQR (2/3)
780 LET rad23w=rad 23*w
790 LET Mg5=(M*g)/5
800 LET aux=2*(rad32–rad23)
810 LET R5w2g=(5*R*w*w)/g
812 LET e=2.71828
813 DEF FN s(x)=(e^x–e^(–x))/2
817 DEF FN c(x)=(e^x+e^(–x))/2
820 LET x$="g215w2*(rad 32
*FN s(rad 23w*x)–SIN (w*x))"
830 LET y$="g215w*(FN
 c(rad23w*x)–COS (w*x))"
840 LET T$="Mg5*(SIN (w*x) +aux
*FN s(rad 23w*x))"
850 LET N$="Mg5*(9*COS (w*x)–4
*FN c(rad23w*x)–R5w2g)"
860 LET f$="VAL T$/VAL N$"
863 GO TO 1430
865 LET in=0
870 LET e$=x$: LET in=in+1: INK in: GO SUB 480
880 LET e$=y$: LET in=in+1: INK in: GO SUB 480
890 LET e$=T$: LET in=in+1: INK in: GO SUB 480
900 LET e$=N$: LET in=in+1: INK in: GO SUB 480
910 LET e$=f$: LET in=in+1: INK in: GO SUB 480
920 STOP
1430 REM
1440 REM Desenarea unui grafic
1450 REM
1460 INPUT "F(X)=";e$; "culoare="; c
1465 IF e$=" "THEN GO TO 1500
1470 INK c
1471 GO SUB 480
1472 GO TO 1460
1500 PRINT #0; AT 0,0; "Rostogolirea unui disc pe un"
```


Scanned with OKEN Scanner

```
1510 PRINT #0; AT 1,1; "plan inclinat mobil"
1520 PAUSE 0
1530 RANDOMIZE USR 65160
1540 PAUSE 0
1550 GO TO 100
```

4.7. Determinarea valorilor funcţiilor $y_1(t)$, $y_2(t)$ şi reprezentarea lor grafică pentru diferite înălţimi H.

```
699>REM Se pune prog. GRAFUNC
700 LET Y$="v*x–g*(x*x)/2+(L/2)*SIN (w*x)"
710 LET Z$="v–g*x+(L*w)*COS (w*x)/2"
720 LET A$="v*x–g*(x*x)/2–(L/2)*SIN (w*x)"
730 LET B$="v–g*x–(L*w)*COS (w*x)/2"
825 REM
826 REM P4.7
827 REM Ciocnirea a doua sfere
828 REM fixate la capetele unei
829 REM bare
830 LET v=2.657
840 LET g=9.81
850 LET w=7.088
860 LET L=0.25
893 LET k1=.8
897 LET k2=.4
900 FOR j=1 TO 3
910 READ H
920 DATA .6, .818, 1.2
930 LET v1=SQR (2*g*H)
940 LET v2=v1
950 LET v1p=k1*v1
960 LET v2p=k2*v2
970 LET w=(v1p–v2p)/1
980 LET v=.5*(vip+v2p)
990 LET e$=Y$
1000 INK j
1005 PRINT AT 2,10* (j–1); "H="; H
1010 GO SUB 480
1013 LET e$=A$
1017 GO SUB 480
```


Scanned with OKEN Scanner

```
1020 NEXT j
1030 PRINT #0; AT 0,0; "P 4.7 Ciocnirea a doua sfere"
1040 PRINT #0; AT 1,1; "fixate la capetele unei bare"
1050 PAUSE 0
1060 RANDOMIZE USR 65160
1070 PAUSE 0
1080 STOP
1430 REM
1440 REM Desenarea unui grafic
1450 REM
1460 INPUT "F(X)="; e$;" culoare="; c
1470 INK c
1471 GO SUB 480
1472 GO TO 1460
```

5.4. Rezolvarea ecuaţiei tg $x = x$ şi primele patru rădăcini pozitive ale ei.

```
10 REM
20 REM rez. ec. tg (x)=x
30 REM
50 DEF FN f(x)=TAN (x)-x
60 LPRINT "Solutii pozitive" ' " ale ecuatiei tg (x)=x sint:" '
75 LET eps=.00000001
80 FOR i=1 TO 4
90 LET x1=i*PI
100 LET x2=x1+PI/2-eps
150 GO SUB 1000
160 IF kod=0 THEN GO TO 180
170 LPRINT "Nu exista sol. in (";x1;", ";x2;")"
175 GO TO 260
180 LPRINT 'x2
260 NEXT i
270 STOP
1000 REM
1010 REM Rezolvarea ecuatiei:
1020 REM f(x)=0 prin metoda
1030 REM injumatatirii.
1040 REM x1 x2 sint marginile
1050 REM intervalului, iar eps
```


Scanned with OKEN Scanner

```
1060 REM este eroarea admisa
1065 REM kod=0 pt. solutie gasita
1067 REM kod=–1 pt. sol. inexist.
1070 REM
1080 LET f1=FN f(x1): LET f2=FN f(x2)
1090 IF f1*f2>0 THEN LET kod=–1: RETURN
1100 LET kod=0
1110 IF ABS (x2–x1)<eps THEN RETURN
1120 LET xm=(x1+x2)/2: LET fm=FN f(xm)
1130 IF f1*fm<0 THEN GO TO 1150
1140 LET x1=xm: LET f1=fm: GO TO 1110
1150 LET x2=xm: LET f2=fm: GO TO 1110
```

Solutii pozitive ale ecuatiei tg (x)=x sint:

```
4.4934095
7.7252518
10.904122
14.066194
```

5.25. Reprezentarea grafică a curbelor de rezonanţă $\left(\frac{x_0}{r}\right.$ în funcţie de $\left.\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ pentru diferite valori ale parametrului $\frac{c}{c_{cr}}$.

```
700 REM
705 REM P5.25
707 REM
708 DATA 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1,0
710 LET e$=" (2*cpcr*x) /SQR ((1–x*x)
* (1–x*x) +4*cpcr*cpcr*x*x)"
723 READ cpcr
727 IF cpcr=0 THEN GO TO 750
730 GO SUB 480
745 GO TO 723
750 PRINT #0; AT 0,0; "P5.25 Funcţia x0/r"
760 PRINT #0; AT 1,1; "c/cr=.01,. 1,. 2,. 5,1"
770 PAUSE 0
790 STOP
1430 REM
```


Scanned with OKEN Scanner

```
1440 REM  Desenarea unui grafic
1450 REM
1460 INPUT "F (X)="; e$;" culoare="; c
1470 INK c
1471 GO SUB 480
1472 GO TO 1460
```


Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. ATANASIU, M., *Mecanică tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.
2. BĂLAN, ŞT., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.
3. BRÎNDEU, L., *Mecanică. Dinamică*, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1982.
4. BUZDUGAN, GH., FETCU, L., RADEŞ, M., *Vibraţii mecanice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
5. CEAUŞU, V., ENESCU, N., CEAUŞU, F., *Culegere de probleme de mecanică*, Vol. III, *Dinamică şi mecanică analitică*, Institutul Politehnic Bucureşti, 1987.
6. CONSTANTINESCU, I., BOLOG, C., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.
7. CSIZMADIA, B., *Mechanika*, Tankönyvkiadó Budapest, 1977.
8. DECIU, E., ENESCU, N., ION, C., CEAUŞU, V., DINU, I., CEAUŞU, F., *Probleme de vibraţii mecanice*, Vol. 1 şi 2, Institutul Politehnic Bucureşti, 1978.
9. DRĂGULESCU DOINA ş.a., *Mecanica şi rezistenţa materialelor*, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, Vol. 1, 1980.
10. FALK, S., *Lehrbuch der technischen Mechanik* I-II. Band, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1967/68.
11. GROŞANU, I., *Mecanică*, Vol. II, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1985.
12. GROŞANU, I., BRÎNDEU, L., *Vibraţii mecanice*, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1986.
13. HEGEDÜS, A., *Mecanică şi rezistenţa materialelor* pentru studenţii Facultăţii de Tehnologie chimică, Vol. I, Insitutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1980.
14. HEGEDÜS, A., *Probleme de mecanică*, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1983.
15. HEGEDÜS, A., DRĂGULESCU DOINA, *Probleme de mecanică. Statică şi Cinematică*, Editura Facla, Timişoara 1989.
16. KLEPP, H., LEHMANN, Th., *Technische Mechanik*, Hüthig Verlag, Heidelberg, 1987.

Scanned with OKEN Scanner

17. LUDVIG, GY., *Dinamika példatár*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
18. LUGNER, P., DESOYER, K., NOVAK, A., *Technische Mechanik. Aufgaben und Lösungen*, Springer-Verlag, Wien, New York, 1976.
19. MANGERON, D., IRIMICIUC, N., *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie*, Vol. I-III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978/1980/1981.
20. Mecanică. *Culegere de probleme*, Vol. II, *Cinematică şi dinamică*, Coordonator Prof. dr. ing. Olariu V., Universitatea din Braşov, 1988.
21. MESCERSKII, I.V., *Sbornik zadaci po teoreticeskoi mehanike*, Moskva, „Nauka", 1981.
22. OLARIU, V., SIMA P., ACHIRILOAIE V., *Mecanică tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.
23. RĂDOI, M., DECIU, E., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.
24. RIPIANU, A., POPESCU, P., BĂLAN, B., *Mecanică Tehnică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
25. RIPIANU, A., POPESCU, P., PLITEA, N., URSU, N., ş.a., *Mecanică tehnică. Dinamică. Culegere de probleme*, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1986.
26. SARIAN, M., CARAGHEORGHE, E., BOIANGIU, D.D., VOICULESCU, D. ş.a. *Probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
27. SILAŞ, GH, *Mecanică. Vibraţii mecanice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
28. SILAŞ, GH., GROŞANU, I., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
29. SILAŞ, GH., RĂDOI, M., BRÎNDEU, L., KLEPP, H., HEGEDÜS, A., *Culegere de probleme de vibraţii mecanice*, Vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.
30. STAN, A., GRUMĂZESCU, M., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
31. TOCACI, E., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.
32. VOINEA, R., VOICULESCU, D., ATANASIU, M., DECIU, E., CEAUŞU, V., ş.a., *Probleme de mecanică*, Vol. IV, Institutul Politehnic Bucureşti, 1986.
33. VOINEA, R., VOICULESCU, D., CEAUŞU, V., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
34. ***, *Probleme de mecanică date la concursurile profesional-ştiinţifice*, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1981.
35. HEGEDÜS, A., GLIGOR, TR., SMICALA, I., *Probleme date la concursurile profesional-ştiinţifice studenţeşti. Mecanică*, Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timişoara, 1989.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefaţă .....

	Enunţuri	Rezultate Indicaţii Rezolvări
1. Dinamica punctului material	**7**	78
1.1. Dinamica punctului material liber	7	78
1.2. Dinamica punctului material supus la legături	12	100
1.3. Dinamica mişcării relative a punctului material	18	119
2. Dinamica corpului rigid şi a sistemelor de corpuri	**24**	132
3. Mecanica analitică	**39**	167
3.1. Principiul lui d'Alembert	39	167
3.2. Principiul deplasărilor virtuale. Principiul lui Toricelli	41	172
3.3. Ecuaţiile lui Lagrange	46	182
4 Ciocniri	**50**	197
5. Vibraţii mecanice	**61**	221
5.1. Vibraţii libere neamortizate	61	221
5.2. Vibraţii libere amortizate	66	237
5.3. Vibraţii forţate fără amortizare	68	241
5.4. Vibraţii forţate cu amortizare	71	248
Anexe		263
A. Noţiuni teoretice. Formule de bază		264
B. Programe de calcul		288

Scanned with OKEN Scanner

ISBN 973-9133-48-7

Bun de tipar: 15.6.1993
Apărut 1993
Coli de tipar: 19

Culegere şi paginare computerizate

Tiparul executat la
S.C. „HELICON" BANAT S.A.
1900, Timişoara, Calea Aradului 1
sub comanda nr. 11

Scanned with OKEN Scanner

EDITURA
HELICON
TIMIŞOARA

Lucrarea a fost astfel concepută încât să contribuie la aprofundarea noţiunilor teoretice predate elevilor şi studenţilor şi să le dezvolte spiritul de creativitate.

O parte din probleme au un evident conţinut practic, referindu-se la mecanisme şi dispozitive ce intră în componenţa maşinilor-unelte.

Cartea se adresează şi inginerilor din producţie şi cercetare, precum şi tuturor celor interesaţi de aplicaţiile mecanicii.

Conţine şi un breviar teoretic necesar pentru rezolvarea problemelor.

Sunt abordate în premieră probleme rezolvate prin programare, indicându-se în întregime programul utilizat şi rezultatele obţinute. Acest aspect deosebeşte culegerea de toate celelalte culegeri de acelaşi gen apărute în ţară.

ISBN 973-9133-48-7

Lei 1600